

## Patrones binarios mediante optimización con recocido simulado: planteamiento inicial

José Antonio Muñoz Gómez<sup>1</sup>, Luis Alberto Morales Rosales<sup>2</sup>, Adriana Silva Mejía<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Engineering Department, Universidad de Guadalajara, Autlán 48900, Jalisco, México

<sup>2</sup>Faculty of Civil Engineering, Conacyt-Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia 58030, Michoacán, México

<sup>3</sup>Instituto de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo 11200, Uruguay

**Resumen:** La medición de objetos tridimensionales (3D) mediante el esquema de proyección de franjas es una técnica establecida que requiere proyectar patrones sinusoidales sin distorsión óptica para la reconstrucción 3D. En este trabajo se propone la generación de patrones binarios que, al ser convolucionados con un filtro gaussiano, se asemejan a una onda sinusoidal requerida en la proyección de franjas. Este problema se plantea como un esquema de optimización unidimensional, en el que el vector binario óptimo se determina mediante un algoritmo de recocido simulado (Simulated Annealing). La heurística propuesta reduce significativamente el espacio completo  $2^n$ , requerido en la búsqueda exhaustiva. Los resultados de la simulación numérica muestran que el método propuesto es computacionalmente eficiente y que la precisión del esquema es equivalente a la obtenida con la búsqueda exhaustiva para valores de hasta  $2^{32}$ .

**Palabras clave:** óptica numérica, patrones binarios desenfocados, optimización heurística, recocido simulado, reconstrucción 3D.

## 1. Introducción

La perfilometría basada en la proyección de franjas se ha consolidado como una técnica robusta para la reconstrucción tridimensional de objetos, debido a su capacidad de obtener mediciones de alta precisión con configuraciones experimentales relativamente simples [1, 2]. Como resultado, esta técnica ha adquirido relevancia en diversas áreas, tales como la arqueología, la industria automotriz, las prótesis personalizadas y los procesos de inspección automática, entre otras [3-5].

En la mayoría de estos sistemas de reconstrucción se emplean algoritmos de desplazamiento de fase (phase-shifting algorithms, PSAs) para la recuperación de la fase, utilizando un proyector de video comercial y una cámara digital para generar y capturar patrones de franjas sinusoidales, respectivamente [6]. Sin embargo, uno de los principales retos es lograr simultáneamente una medición de alta velocidad y

alta precisión en la reconstrucción. La primera requiere reducir el número de patrones necesarios para recuperar la fase, mientras que la segunda depende de la relación señal-ruido y de la calidad de los patrones sinusoidales. Esta última se ve afectada por la respuesta no lineal del proyector, lo cual se traduce en la presencia de armónicos en la reconstrucción tridimensional (3D). Esto se debe a la relación no lineal entre la intensidad de salida y la señal capturada.

Para mitigar este problema, se han reportado en la literatura diversas estrategias en la literatura [5, 6]. Entre ellas destaca la generación de patrones de franjas sinusoidales mediante la proyección y adquisición de patrones binarios desenfocados. Esta técnica se basa en la creación de patrones con únicamente dos niveles de intensidad  $\{0,1\}$ , proyectados de tal forma que el sistema óptico del proyector actúe como un filtro pasa-bajas, suprimiendo armónicos de alta frecuencia y preservando la componente fundamental sinusoidal.

En 2009, Zhang y Lei [7] propusieron la técnica de proyección desenfocada de patrones binarios cuadrados (SBP, Square Binary Patterns), caracterizada por su simplicidad en la generación de patrones binarios. No obstante, este esquema requiere un alto nivel de desenfoco para suprimir adecuadamente los armónicos de alta frecuencia inherentes a la señal cuadrada y obtener un perfil de intensidad cuasi-sinusoidal, lo que reduce la modulación (contraste) del patrón sintetizado. Esto provoca una degradación en la relación señal-ruido (SNR, Signal-to-Noise Ratio) y, en consecuencia, incrementa los errores de fase, afectando la precisión en la reconstrucción 3D [8].

Estos resultados motivaron el desarrollo de diversas técnicas para sintetizar perfiles de intensidad sinusoidal a partir de patrones binarios desenfocados [1-4]. Estas técnicas se pueden clasificar en dos grandes categorías: (a) modulación por ancho de pulso (PWM, Pulse Width Modulation) en dominios unidimensionales (1D), y (b) generación de patrones binarios basados en técnicas de semitonos (halftoning), derivados de parches bidimensionales (2D).

Las técnicas de semitonos constituyen un enfoque de optimización global para la síntesis de patrones binarios, basado en métodos de tramado o dithering. Con el objetivo de mejorar su desempeño, Dai et al. [9] propusieron en 2014 un esquema de optimización que aprovecha las propiedades de simetría y periodicidad inherentes a una señal sinusoidal, generando patrones binarios optimizados

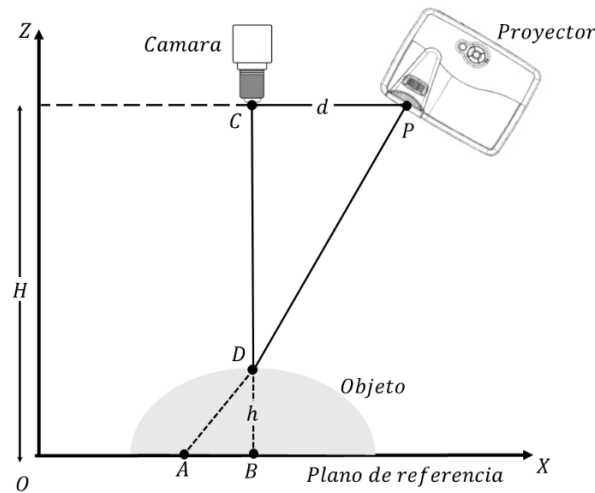
localmente. Posteriormente, ese mismo año, los autores presentaron un esquema complementario que incorpora la intensidad de los patrones en el proceso de optimización, lo que mejora la calidad de la reconstrucción [10].

Estas contribuciones han servido de base para el desarrollo de múltiples estrategias de optimización local enfocadas en mejorar la distribución de la intensidad o de la fase, así como en reducir el costo computacional asociado a la generación de patrones binarios [11,12]. Adicionalmente, Silva et al. [14] propusieron la creación de parches binarios 2D como un arreglo de soluciones 1D. Mediante un esquema de optimización, determinaron el vector óptimo empleando condiciones de simetría y periodicidad en la solución. A pesar de estos avances, aún persiste la necesidad de desarrollar métodos más eficientes para generar patrones binarios que aproximen señales sinusoidales, en particular mediante enfoques unidimensionales como un primer enfoque de aproximación.

En este trabajo, proponemos un método novedoso para generar patrones binarios 1D mediante el esquema de optimización por recocido simulado (Simulated Annealing). Estos vectores, al ser convolucionados con un núcleo gaussiano, se asemejan a ondas sinusoidales, requeridas en esquemas de proyección de franjas para la reconstrucción 3D. La heurística propuesta requiere  $k$  –iteraciones para converger, donde  $k$  representa una fracción del espacio de búsqueda completo  $2^n$ . El algoritmo desarrollado es computacionalmente eficiente y los resultados numéricos validan la efectividad del método propuesto.

## 2. Esquema de Proyección de Franjas

Un sistema de reconstrucción tridimensional basado en la proyección de patrones de franjas sinusoidales se muestra en la Figura 1. La configuración consiste en una computadora personal para generar y procesar patrones de franjas. Un proyector digital que se usa para proyectar los patrones de franjas, una cámara de alta resolución (CCD, por sus siglas en inglés, Charge-Coupled Device) que se emplea para capturar los patrones de franjas modulados en fase por la superficie del objeto y un plano de referencia para colocar la pieza a digitalizar.



**Figura 1.** Montaje experimental para la proyección y adquisición de patrones sinusoidales para la reconstrucción de superficies 3D.

En la perfilometría por proyección de franjas (FPP, por sus siglas en inglés: fringe projection profilometry), el método de corrimiento de fase se ha adoptado ampliamente para medir superficies y formas tridimensionales. El procedimiento consiste en proyectar una secuencia de patrones de franjas sinusoidales corridas en fase sobre la superficie del objeto de prueba y en adquirir los patrones deformados o modulados por dicha superficie. Matemáticamente lo podemos modelar como:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos[(x) + \varphi(x, y) - \delta] \quad (1)$$

con  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $a(x, y)$  es la iluminación de fondo,  $b(x, y)$  es la amplitud de modulación,  $f$  corresponde a la frecuencia espacial,  $\varphi(x, y)$  es la fase relacionada al perfil del objeto medido,  $\delta$  son los corrimientos de fase conocidos, y  $N$  corresponde al número de patrones utilizados para la estimación de la fase.

Considerando corrimientos igualmente espaciados, podemos determinar la fase  $\varphi_w$  para cada pixel  $(x, y)$  mediante la expresión analítica general

$$\varphi_w(x, y) = \tan^{-1} \left[ \frac{\sum_{k=1}^N I_k(x, y) \sin(2\pi k/N)}{\sum_{k=1}^N I_k(x, y) \cos(2\pi k/N)} \right] \quad (2)$$

donde  $N$  denota el número de patrones de franjas utilizadas para recuperar la fase. La función trigonométrica tangente inversa mapea la fase en el intervalo  $[-\pi, +\pi)$ , obteniendo así una fase envuelta. Mediante la técnica de desenvolvimiento de fase,

podemos transformar la fase discontinua en un rango continuo expresado en radianes [14].

En aplicaciones que requieran mediciones rápidas, capturar más de tres imágenes suele ser poco práctico. El número mínimo de imágenes requeridas para realizar una reconstrucción son tres, empleando para ello desplazamientos equiespaciados. La fase  $\varphi(x, y)$  puede ser estimada como

$$\varphi_w(x, y) = \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{3}(I_1(x, y) - I_3(x, y))}{2I_2(x, y) - I_1(x, y) - I_3(x, y)} \right] \quad (3)$$

este esquema, conocido como método de tres pasos, prácticamente no rechaza ningún tipo de armónico que es característico de los sistemas ópticos basados en proyector-cámara. Es decir, el sistema introduce errores no lineales (armónicos) en la reconstrucción; por ello, la proyección desenfocada de patrones binarios es un método eficaz para minimizar la presencia de armónicos.

### 3. Patrones binarios con recocido simulado

La generación de patrones binarios desenfocados puede plantearse matemáticamente como un problema de optimización:

$$\min_b \|s(x) - g(x) \otimes b(x)\| \quad (4)$$

donde  $g(x) = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}$  corresponde al núcleo Gaussiano que es convolucionado con la señal binaria  $b(x) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  con  $b_i \in \{0,1\}$ , la señal sinusoidal a estimar queda expresada por  $s(x)$ . La expresión anterior se interpreta como: sea  $s(x)$  la señal exacta, la cual puede aproximarse mediante el producto (convolución  $\otimes$ ) de dos señales  $g(x) \otimes b(x)$ , esto corresponde a una aproximación de la forma:

$$s(x) \approx g(x) \otimes b(x) \quad (5)$$

donde el vector discreto  $b(x)$  con valores binarios  $\{0,1\}$  es la función a determinar. Para la estimación, utilizamos la norma vectorial, como se muestra en la ecuación 4.

## 3.1 Recocido simulado para datos binarios

La determinación del vector óptimo binario de la ecuación (4) se plantea como un problema de optimización mediante la heurística de recocido simulado, inspirada en el proceso físico de recocido de materiales metálicos, en el que un sólido se calienta y luego se enfría lentamente hasta alcanzar un estado de mínima energía. En la Figura 2 se muestra el algoritmo de optimización estocástico [15].

### Algoritmo de Recocido Simulado

```
Inicializar  $b \leftarrow b_0$  y  $T \leftarrow T_0$ 
while  $T > 0$ 
    generar solución vecina  $b' \leftarrow \mathcal{N}(b)$ 
    evaluar  $\Delta E = E(b') - E(b)$ 
    sí  $\Delta E < 0$  entonces  $b \leftarrow b'$ 
    caso contrario
        generar número aleatorio  $r \in [0,1]$ 
        sí  $r < \exp(-\Delta E/T)$  entonces  $b \leftarrow b'$ 
    actualizar temperatura
         $T \leftarrow \omega T$ 
```

**Figura 2.** Esquema general del algoritmo de recocido simulado empleado para la estimación del vector binario.

El esquema mostrado es ampliamente conocido en la literatura especializada [16], lo novedoso radica en la aplicación a un problema de óptica y en la adecuada implementación para *generar una solución vecina*. En nuestro caso, la generación de un nuevo vector se divide en dos pasos:

- a) Se eligen dos índices aleatorios  $p_1, p_2$

Realizamos un swap:  $b'(p_1, p_2) \leftarrow b(p_2, p_1)$

- b) Probabilísticamente se realiza una negación de elemento

Sea  $x \approx \text{rand}(0,1)$ , sí  $x > 0.5$   $\neg b'(p_1)$ , else  $\neg b'(p_2)$

El primer paso se asemeja a la estrategia de mutación empleada en un algoritmo genético, que ha mostrado alta efectividad en la generación de vecinos cercanos [17]. Por otra parte, el segundo paso introduce un componente estocástico en la negación de un elemento puntual. Esta combinación constituye una técnica adecuada para generar soluciones vecinas en un vector de datos binarios.

## 4. Resultados Numéricos

En esta sección se presenta una serie de simulaciones numéricas para evaluar el rendimiento de la heurística de optimización binaria. Para ello, emplearemos la señal continua  $\varphi(x) = \cos(x - \pi)$ , muestreada sobre un periodo  $T$  empleando  $n=16, 18, 21, 24, 28$ , y  $32$  píxeles. La señal aproximada  $\varphi_b(x)$  es el resultado del patrón binario óptimo  $b = \{b_1, \dots, b_n\}$  convolucionado con un núcleo gaussiano  $g(x)$ . A lo largo de la exposición utilizaremos indistintamente la notación  $T$  para referirnos al valor de  $n$ . El error lo mediremos empleando la norma vectorial del error cuadrático medio (rms, root mean square):

$$rms = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varphi(x) - \varphi_b(x))^2 \right)^{1/2} \quad (6)$$

En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos mediante la búsqueda exhaustiva de patrones binarios  $2^T$ . En la primera columna se indica la variación del periodo  $T$ , mientras que en la primera fila se indican las aproximaciones del núcleo gaussiano.

Como puede observarse, a partir del renglón  $b_{21}$  conforme incrementamos los puntos para aproximar la onda sinusoidal, el error disminuye (variación entre los renglones). Este mismo comportamiento se observa a medida que aumentamos la varianza del núcleo gaussiano (variación entre las columnas). Un comportamiento similar se reportó al emplear una aproximación binaria durante un cuarto del periodo [13]. Por otra parte, en el trabajo de Muñoz et al., se mostró que, al aplicar el valor óptimo al método de tres pasos para reconstruir un plano, el error numérico disminuye ligeramente, aunque sin mostrar un patrón claro [18].

**Tabla 1.** Error medido para distintos tamaños del periodo  $n=16,18,\dots,24$ , empleando tres diferentes aproximaciones del núcleo Gaussiano.

	$g_1$	$g_2$	$g_3$
$b_{16}$	0.19861	0.15063	0.29422
$b_{18}$	0.15502	0.1488	0.2096
$b_{21}$	0.29480	0.25641	0.24890
$b_{24}$	0.25702	0.15513	0.13331
$b_{28}$	0.24003	0.14535	0.14535
$b_{32}$	0.21764	0.17547	0.12173

Empleando el método de optimización heurística (ver sección 3), se determinó la mejor aproximación de la onda sinusoidal variando el núcleo gaussiano  $g_1, g_2, g_3$  y empleando las diferentes combinaciones del vector de datos  $b_{16}, \dots, b_{32}$ , ver Tabla 1. En cada uno de los casos analizados, los resultados obtenidos con la heurística fueron idénticos a los alcanzados mediante la técnica de búsqueda exhaustiva. Este resultado valida la precisión del método propuesto.

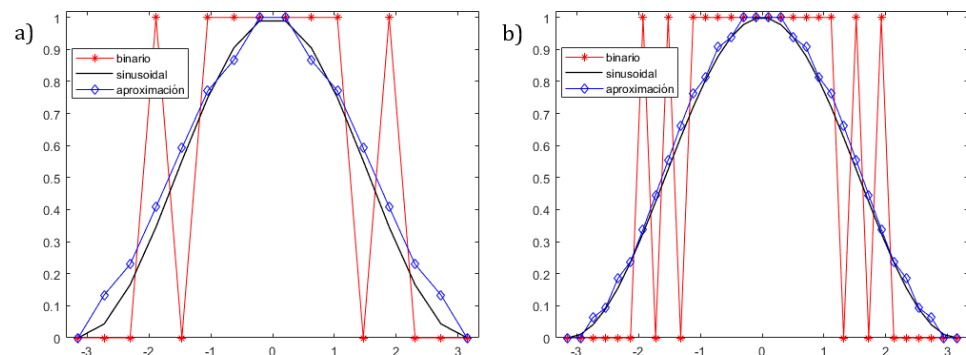
La principal ventaja de la heurística radica en el número de operaciones realizadas y, en consecuencia, en el tiempo de procesamiento. Para  $n=32$ , el espacio de búsqueda completo es  $2^n = 4,294,967,296$ . Por otra parte, en la propuesta desarrollada, el espacio de búsqueda fue de 10,000 iteraciones. Este valor permanece constante y representa el inverso de la tasa de enfriamiento de la temperatura en cada iteración. La determinación del número de iteraciones fue empírica y constituye un punto de partida para futuros análisis de convergencia.

Esta drástica reducción en el número de operaciones puede cuantificarse midiendo el tiempo de cómputo; para el caso de  $b_{28}$  con  $g_2$ , la búsqueda exhaustiva requirió 12,744 s, mientras que la heurística propuesta requirió solo 11 s de procesamiento.

En la Figura 2 se muestra una representación gráfica de una dupla de vectores binarios obtenidos mediante el método de recocido simulado. En la ecuación (7) se indican los vectores para los casos  $\langle b_{16}, g_1 \rangle$  y  $\langle b_{32}, g_3 \rangle$ , respectivamente.

$$\begin{array}{ll}
 0001011111101000 & n = 16 \\
 000000101011111111111110101000000 & n = 32
 \end{array} \quad (7)$$

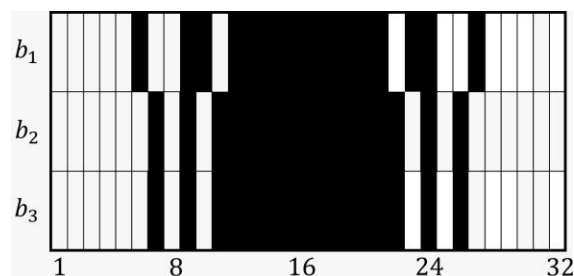
En la Figura 3b (periodo  $n=32$ ) se observa una mayor variación de valores binarios  $\{0,1,0\}$ , con respecto al periodo  $n=16$ , mostrado en la Figura 3a. Esta variación, al ser convolucionada con un filtro gaussiano, permite una representación más precisa de la onda sinusoidal, Este efecto, es lo que se conoce en la literatura como proyección con patrones desenfocados [19].



**Figura 3.** Aproximación binaria  $s(x) \approx g(x) \otimes b(x)$  empleando recocido simulado para estimar  $b(x)$ . a) vector binario con  $n=16$ , núcleo gaussiano  $g_1$ ; b) vector binario con  $n=32$ , núcleo gaussiano  $g_3$ .

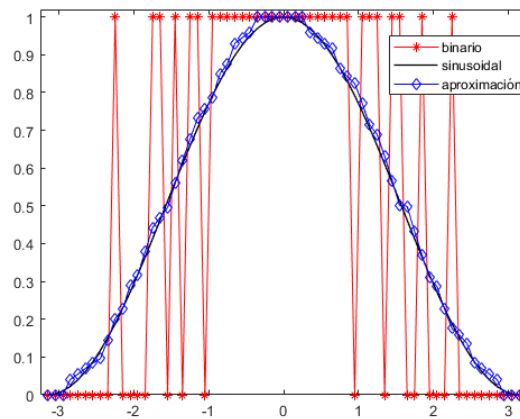
Finalmente, al analizar el error puntual, se obtiene  $9.04 \times 10^{-2}$  para  $n=16$ , y un valor de  $4.2 \times 10^{-2}$  para  $n=32$ . Esto representa una reducción del error cercana al 50% en la aproximación, lo cual es consistente con los resultados de la Tabla 1.

En la Figura 4 se muestra una representación gráfica de los vectores binarios óptimos para  $n=32$ , empleando los distintos núcleos gaussianos. A medida que se incrementa el núcleo de convolución, se observa una disminución de la variación de  $\{0,1,0\}$ . Esto se debe al efecto local del operador, lo que resulta adecuado para una mejor representación de la función continua.



**Figura 4.** Parche binario  $n=32$  con diferentes núcleos gaussianos  $g_1, g_2, g_3$ .

Como resultado final, aplicamos el algoritmo propuesto (ver Figura 2) para aproximar la onda sinusoidal con  $n=64$  nodos. Cabe señalar que, al emplear la técnica exhaustiva para determinar el vector óptimo, es necesario evaluar todas las combinaciones posibles  $2^{64} \approx 1.8 \times 10^{19}$ , lo cual resulta inviable sin los recursos computacionales adecuados.



**Figura 5.** Aplicación del esquema de aproximación binaria para  $n=64$  con núcleo gaussiano  $g_3$ .

En la Figura 5 se muestran tres gráficas que corresponden a la onda sinusoidal  $y(x)$ , el vector solución binario  $b = [b_1, \dots, b_{64}]$ , la solución aproximada convolucionada  $\tilde{y}$ . Como se puede apreciar, la estimación  $\tilde{y}$  presenta pequeñas variaciones alrededor de  $\pm\pi$  que no se observan en la señal continua  $y(x)$ . Esto puede explicarse por la falta de precisión en el óptimo causada por un óptimo local o debido a la falta de información *a-priori* en el modelo matemático. Sin embargo, el esquema de optimización propuesto es capaz de minimizar funciones binarias que son infactibles de resolver mediante esquemas clásicos de optimización.

El resultado obtenido constituye un punto de partida adecuado para incorporar restricciones de suavidad a la solución mediante una condición de suavidad de tipo Tikhonov.

## Conclusiones

En este artículo, se propuso un esquema novedoso para generar un vector de datos binarios convolucionados que representa una aproximación a una onda sinusoidal requerida como patrón de franjas en la reconstrucción 3D. Se implementó el algoritmo de recocido simulado (simulated annealing) y se compararon los

óptimos obtenidos con los del método de búsqueda exhaustiva. Los resultados numéricos muestran que la heurística propuesta es computacionalmente eficiente y que los óptimos obtenidos coinciden con los obtenidos mediante la técnica de búsqueda exhaustiva  $2^n$ . En todos los casos analizados  $n = 16, \dots, 32$ , el método desarrollado requirió  $k$  –iteraciones, donde  $k$  es una fracción menor al 1% del tiempo empleado con la búsqueda exhaustiva. Asimismo, a partir de  $n=21$ , el error disminuye a medida que aumenta el número de nodos en la aproximación binaria o en el filtro gaussiano, lo cual es consistente con una representación más precisa de la onda sinusoidal.

Como trabajo futuro, se extenderá la propuesta a dos dimensiones y se analizará, mediante análisis de Fourier, la posibilidad de armónicos inducidos por los patrones. Asimismo, se llevarán a cabo pruebas experimentales para validar la propuesta teórica.

## Referencias

1. S. Zhang, "Recent progresses on real-time 3D shape measurement using digital fringe projection techniques," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 48, no. 2, pp. 149–158, 2010. doi:10.1016/j.optlaseng.2009.03.008
2. C. Quan, W. Chen, and C. J. Tay, "Phase-retrieval techniques in fringe-projection profilometry," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 48, no. 2, pp. 235–243, 2010. doi:10.1016/j.optlaseng.2009.06.013
3. C. Zuo, L. Huang, M. Zhang, Q. Chen, and A. Asundi, "Temporal phase unwrapping algorithms for fringe projection profilometry: A comparative review," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 85, pp. 84–103, 2016. doi:10.1016/j.optlaseng.2016.04.022
4. C. Zuo, S. Feng, L. Huang, T. Tao, W. Yin, and Q. Chen, "Phase shifting algorithms for fringe projection profilometry: A review," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 109, pp. 23–59, 2018. doi:10.1016/j.optlaseng.2018.04.019
5. S. Zhang and P. S. Huang, "Phase error compensation for a 3-D shape measurement system based on the phase-shifting method," *Optical Engineering*, vol. 46, no. 6, p. 063601, 2007. doi:10.1117/1.2746814
6. Z. Li, Y. Shi, C. Wang, and Y. Wang, "Accurate calibration method for a structured light system," *Optical Engineering*, vol. 47, no. 5, p. 053604, 2008. doi:10.1117/1.2931517
7. S. Lei and S. Zhang, "Flexible 3-D shape measurement using projector defocusing," *Optics Letters*, vol. 34, no. 20, pp. 3080–3082, 2009. doi:10.1364/OL.34.003080
8. G. A. Ayubi, J. A. Ayubi, J. M. Di Martino, and J. A. Ferrari, "Pulse-width modulation in defocused three-dimensional fringe projection," *Optics Letters*, vol. 35, no. 21, pp. 3682–3684, 2010. doi:10.1364/OL.35.003682
9. J. Dai, B. Li, and S. Zhang, "High-quality fringe pattern generation using binary pattern optimization through symmetry and periodicity," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 52, pp. 195–200, 2014. doi:10.1016/j.optlaseng.2013.06.010

10. J. Dai, B. Li, and S. Zhang, "Intensity-optimized dithering technique for three-dimensional shape measurement with projector defocusing," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 53, pp. 79–85, 2014. doi:10.1016/j.optlaseng.2013.08.015
11. Y. Xiao and Y. Li, "High-quality binary fringe generation via joint optimization on intensity and phase," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 97, pp. 19–26, 2017. doi:10.1016/j.optlaseng.2017.05.006
12. F. Lu, C. Wu, and J. Yang, "High-quality binary fringe patterns generation by combining optimization on global and local similarity," *Journal of the European Optical Society-Rapid Publications*, vol. 14, no. 12, 2018. doi:10.1186/s41476-018-0081-0
13. A. Silva, A. Muñoz, J. L. Flores, y J. Villa, "Exhaustive dithering algorithm for 3D shape reconstruction by fringe projection profilometry," *Applied Optics*, vol. 59, no. 13, pp. 31-38, 2019. doi:10.1364/AO.381924
14. D. C. Ghiglia y L. A. Romero, "Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods," *Journal Optical Society of America*, vol. 11, no. 1, pp. 107–117, (1994). doi:10.1364/JOSAA.11.000107
15. P. Siarry, G. Berthiau, F. Durdin y J. Haussy, "Enhanced simulated annealing for globally minimizing functions of many continuous variables," *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 23, no. 2, pp. 209–228, 1997. <https://doi.org/10.1145/264029.264043>
16. B. Suman, P. Kumar, "A survey of simulated annealing as a tool for single and multiobjective optimization," *Journal of the Operational Research Society*, vol. 57, no. 10, pp. 1143–1160, 2005. doi:10.1057/palgrave.jors.2602068
17. J. H. Holland, "Genetic Algorithms", *Scientific American*, vol. 267, no. 1, pp. 66-72, 1992. doi:10.1038/scientificamerican0792-66
18. Antonio Muñoz, Omar Aguilar-Loreto, Abimael Jiménez-Pérez, "Patrones binarios unidimensionales para reconstrucción 3D: planteamiento inicial", *Innovación y desarrollo tecnológico revista digital*, vol. 17, no. 2, pp. 1084-1091, 2025.
19. G. Garnica, M. Padilla y M. Servin, "Dual-sensitivity profilometry with defocused projection of binary fringes", *Applied Optics*, vol. 56, no. 28, pp. 7985–7989, 2017. doi:10.1364/AO.56.007985