

Solución analítica del problema de conducción de calor en un paralelepípedo tridimensional con condiciones no homogéneas en la frontera

Omar Aguilar-Loreto¹, Belter E. Ordaz-Mendoza², J. Antonio Muñoz-Gómez¹

¹Departamento de Ingenierías, Universidad de Guadalajara, Av. Independencia Nacional No. 151, Autlán, 48900 Jalisco, México

²Department of Physics, University of Connecticut, Storrs, Connecticut 06269, USA

Resumen: La ecuación del calor se ha consolidado como uno de los modelos matemáticos fundamentales de la física matemática para estudiar los fenómenos de transferencia de energía térmica. En este trabajo se presenta una solución analítica para la ecuación del calor tridimensional en un paralelepípedo sometido a diferentes temperaturas impuestas en cada una de sus seis caras. El análisis se basa en el método de separación de variables y el desarrollo en series de funciones ortogonales. Se analiza un caso representativo de hueco térmico cuya evolución está determinada por condiciones de frontera no homogéneas en un dominio tridimensional. Como consecuencia, se observa la necesidad de resolver la ecuación de Laplace con el fin de obtener la distribución de frontera tridimensional. Al analizar la evolución temporal, se observa un comportamiento consistente con las predicciones del modelo de la ecuación del calor y en concordancia con las leyes vigentes de la termodinámica.

Palabras clave: ecuación del calor, conducción térmica tridimensional, condiciones de frontera no homogéneas.

1. Introducción

El estudio del calor y otras magnitudes físicas ha propiciado el desarrollo de esquemas científicos que permiten reproducir algunos fenómenos físicos en forma controlada. Frecuentemente, el estudio de estos fenómenos no se puede realizar de manera directa, debido a que estos dependen de varios factores sobre los cuales no se puede tener un control completo y que, en ocasiones, quedan fuera del alcance del experimentador [1]. Dichos factores pueden estar relacionados con limitaciones económicas, con el empleo de materiales aún no explorados, con la necesidad de condiciones ideales o con la ausencia de muestras con características especiales. Es por ello que los investigadores se ven obligados a reproducir los fenómenos bajo condiciones restringidas. Actualmente, con el desarrollo de la tecnología, existen diversos recursos con este propósito, como herramientas computacionales y software especializado [2,3].

Debido a lo anterior, es necesario recurrir a la modelación científica [1,4,5], la cual permite reproducir un fenómeno físico que no puede ser estudiado en forma

Volumen 1, no. 2

Recibido: octubre 23, 2025

Aceptado: sept. 17, 2025

autor de correspondencia:
omar.aguilar@academicos.
udg.mx

<https://doi.org/10.66482/yvqcd170>

directa proporcionando una representación aproximada a la situación real. Sin embargo, aun cuando el modelo está sustentado lógicamente y matemáticamente siendo consistente con los modelos existentes, la experimentación sigue siendo el criterio que determina su validez [6-8]. Ejemplos notables de este concepto, en particular en la Física [9] incluyen la predicción de la antimateria a partir de las ecuaciones de Dirac [10], las ondas gravitacionales [11] o el bosón de Higgs [12].

En este contexto, se utiliza el modelo matemático de conducción del calor, propuesto originalmente por Fourier [13] que, a la fecha, constituye una teoría consolidada, para analizar fenómenos de transferencia de energía térmica. Este modelo ofrece un esquema a partir del cual se pueden obtener soluciones analíticas que permitan comprender con mayor profundidad el comportamiento de la evolución de la temperatura.

En este trabajo se presenta una solución analítica para la ecuación del calor tridimensional en un paralelepípedo sometido a condiciones de temperaturas prescritas y diferentes en cada una de sus seis caras. El modelo considera un medio homogéneo e isotrópico con propiedades térmicas constantes. Mediante la aplicación del método de separación de variables y el desarrollo en series ortogonales, se obtiene una expresión analítica para la distribución espacial de temperatura dentro del dominio. La solución derivada satisface rigurosamente la ecuación del calor y las condiciones de frontera impuestas. Con el propósito de ilustrar la aplicabilidad del modelo, se presentan resultados para un escenario térmico representativo, mostrando la influencia de las temperaturas de frontera sobre el campo térmico tridimensional. Los resultados obtenidos constituyen una referencia útil para la validación de métodos numéricos y para el análisis de problemas de conducción de calor en geometrías rectangulares [14,15].

La principal fortaleza de este trabajo radica en que no se limita a presentar una solución de la ecuación del calor, sino que desarrolla de manera explícita y sistemática el problema tridimensional con condiciones de frontera no homogéneas en un paralelepípedo. El estudio integra la deducción física basada en el principio de conservación de la energía, el tratamiento analítico mediante separación de variables y series ortogonales, y la ilustración de la solución a través de un caso representativo de interés aplicado.

En conjunto, el manuscrito proporciona una exposición detallada y accesible de un problema que con frecuencia se presenta de forma resumida en la literatura, constituyendo una referencia útil tanto para fines didácticos como para la validación de métodos numéricos.

En la siguiente sección se presenta un panorama físico para reconocer las cantidades fundamentales, que intervienen en la caracterización del modelo del calor así como su definición. En el apartado 3 se establece el principio universal de la conservación de la energía como el pilar esencial en la deducción del modelo. Los

resultados principales, a manera de consecuencia y ejemplos del modelo desarrollado en el apartado anterior de este artículo, se exponen en la sección 4. Finalmente, en la sección 5, se describen las conclusiones, así como las ideas que se abordarán en un artículo posterior.

2. Formulación matemática

Los fenómenos de propagación de la energía térmica que se presentan en un sólido, se describen a partir de la dinámica del calor que se transfiere tanto al interior como al exterior del cuerpo. Para ello es necesario preservar el principio universal de la conservación de la energía durante un proceso evolutivo [16,17]. Podemos enunciar la conservación de la energía para un sólido arbitrario en la forma que sigue

$$\text{cambios en la cantidad de calor} = \text{flujo de calor interno o externo} \\ + \text{fuentes de calor}$$

Los cambios que surgen en la cantidad de energía térmica en el objeto de estudio, son expresados como $\partial e / \partial t$, que es la derivada parcial con respecto del tiempo t (en minutos). El flujo de calor que penetra o escapa en el cuerpo a través de una determinada sección transversal de superficie finita, se expresa por medio de una función que depende de las coordenadas espaciales $\vec{x} = (x, y, z)$ y el tiempo (t), usualmente se denota por $\varphi(\vec{x}, t)$ y está dada en unidades de calor sobre tiempo sobre superficie (J/sm^2 en el SI). Finalmente pueden existir aportaciones internas de calor posiblemente por reacciones químicas, nucleares o de otra naturaleza al interior del objeto, expresadas a partir de una función $Q(\vec{x}, t)$ (J/sm^2 en el SI).

Al formular matemáticamente lo anterior se obtiene lo siguiente

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \varphi(\vec{x}, t) + Q(\vec{x}, t). \quad (1)$$

Se puede suponer un sólido arbitrario tridimensional que ocupa un volumen V , en este caso se suman todas las contribuciones a la cantidad de energía térmica total del objeto, para ello se postula la función $u(\vec{x}, t)$ la cual describe la distribución de temperatura como una magnitud física, macroscópicamente medible. Asimismo, se introduce la función $\vec{\varphi}(\vec{x}, t)$ denominada vector de flujo calórico, que determina la dirección de propagación del calor al interior o exterior del sólido. Para los fines del presente trabajo, se omiten los detalles para la deducción completa de la expresión siguiente

$$c(\vec{x})\rho(\vec{x})\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}, t) + Q(\vec{x}, t) \quad (2)$$

donde $\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}$, con $\vec{\varphi}(\vec{x}, t) = (\varphi_x(\vec{x}, t), \varphi_y(\vec{x}, t), \varphi_z(\vec{x}, t))$, $\rho(\vec{x})$ es la densidad de masa y $c(\vec{x})$ es el calor específico. Esta expresión corresponde a la ecuación del calor (o difusión).

En 1822 Joseph Fourier formuló el principio por el cual se conduce el calor a través de objetos metálicos bidimensionales [18], el cual es proporcional al negativo del gradiente de temperatura $\vec{\varphi}(\vec{x}, t) = -K_0(\vec{x})\vec{\nabla}u(\vec{x}, t)$ donde el término $K_0(\vec{x})$ se conoce como conductividad térmica y puede depender del material. Finalmente, al sustituir en la ecuación (8) se obtiene

$$c(\vec{x})\rho(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot (K_0(\vec{x})\vec{\nabla}u(\vec{x}, t)) + Q(\vec{x}, t). \quad (3)$$

Esta es la ecuación del calor en su forma más general.

En este trabajo, se asume que el material es homogéneo, uniforme e isótropo por lo que la densidad de masa, el calor específico y la conductividad del mismo son constantes. Asimismo, se ha supuesto que no existen fuentes de calor al interior del cuerpo, es decir, $Q(\vec{x}, t) = 0$ de esta forma la ecuación del calor se expresa como

$$\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u(\vec{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\vec{x}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(\vec{x}, t)}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

donde $k = K_0/c\rho$ es la Difusividad Térmica del material [15, 16].

3. Solución al problema de Dirichlet

En esta sección encontraremos la solución para la ecuación 4 usando coordenadas cartesianas en tres dimensiones. Como se muestra en la figura 1, se considera un paralelepípedo con dimensiones $L \times M \times N$, es decir, el volumen está delimitado en la región espacial $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq M, 0 \leq z \leq N\}$.

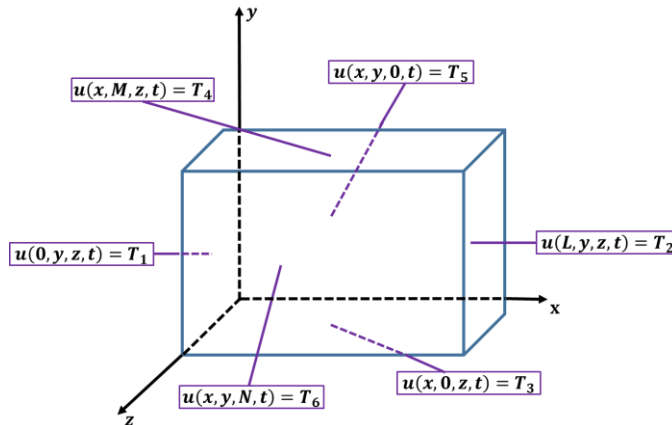


Figura 1: Un sólido rectangular ideal con las 6 caras sometidas a distintas temperaturas en el caso general.

3.1 Caras de un paralelepípedo aisladas

La ecuación 1 en coordenadas cartesianas se puede resolver usando el método de separación de variables [16,17,19]; se propone la solución en la forma $u(\vec{x}, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$, lo que nos lleva al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente

$$\frac{dT(t)}{dt} + q^2 k T(t) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \mu^2 Y(y) = 0$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \nu^2 Z(z) = 0$$

con $q^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$.

Para resolver el sistema de ecuaciones (5) supondremos que todas las caras del paralelepípedo están aisladas, en la figura 1 se elige $T_1 = T_2 = \dots = T_6 = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} u(0, y, z, t) &= 0 & u(L, y, z, t) &= 0 \\ u(x, 0, z, t) &= 0 & u(x, M, z, t) &= 0 \\ u(x, y, 0, t) &= 0 & u(x, y, N, t) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Las condiciones (6) junto con el sistema (5), caracterizan un problema de Sturm-Liouville, donde los eigenvalores obtenidos son $\lambda = \frac{l\pi}{L}$, $\mu = \frac{m\pi}{L}$, $\nu = \frac{n\pi}{L}$, con $l, m, n = 1, 2, 3, \dots$ y el conjunto de eigenfunciones ortogonales son $\text{sen}\left(\frac{l\pi x}{L}\right)$, $\text{sen}\left(\frac{m\pi y}{M}\right)$, $\text{sen}\left(\frac{n\pi z}{N}\right)$, respectivamente, junto con la eigenfunción $T(t) = e^{-q^2 k t}$. Por lo tanto, se tiene la solución general

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \\ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{lmn} \text{sen}\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{M}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi z}{N}\right) & \quad (7) \\ \times e^{-\left(\frac{(l\pi)^2}{L^2} + \frac{(m\pi)^2}{M^2} + \frac{(n\pi)^2}{N^2}\right) \alpha t} & \end{aligned}$$

Como se puede observar, esta solución corresponde a una superposición de funciones armónicas ortogonales para cada dimensión espacial, asimismo el

término exponencial decreciente asegura la integrabilidad de la solución. Se ha supuesto que inicialmente se tiene una distribución de temperatura específica, matemáticamente

$$u(x, y, z, t = 0) = f(x, y, z). \quad (8)$$

Para completarla, se ajusta la expresión (7) a la condición inicial (13) al expresarla como combinación lineal de las funciones armónicas, para ello es necesario calcular los coeficientes de Fourier mediante la fórmula

$$A_{lmn} = \frac{8}{LMN} \int_0^N \int_0^L \int_0^M f(x, y, z) \times \sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{M}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{N}\right) dx dy dz. \quad (9)$$

La solución general corresponde a la expresión (7) junto con (9).

3.2 Caras de un paralelepípedo a temperaturas constantes diferentes

Las caras de un paralelepípedo no necesariamente deben ser aisladas. En este artículo se aborda el problema cuando éstas poseen diferentes temperaturas en cada una de ellas, para ello las condiciones de frontera son

$$\begin{aligned} u(0, y, z, t) &= T_1 & u(L, y, z, t) &= T_2 \\ u(x, 0, z, t) &= T_3 & u(x, M, z, t) &= T_4 \\ u(x, y, 0, t) &= T_5 & u(x, y, N, t) &= T_6. \end{aligned} \quad (10)$$

Para encontrar una solución que satisfaga (7) junto con (6) y (10), buscamos una función que describa la distribución de temperaturas para el caso estacionario que llamaremos $g(\vec{x})$; esta función tiene la condición $g_t(\vec{x}) = 0$, por lo tanto $\nabla^2 g(\vec{x}) = 0$, la función $g(\vec{x})$ satisface la ecuación de Laplace [17,19]. La solución se propone entonces de la siguiente forma [16]

$$u(\vec{x}, t) = v(\vec{x}, t) + g(\vec{x}) \quad (11)$$

donde

$$g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^6 g_i(\vec{x}). \quad (12)$$

Cada función $g_i(\vec{x})$ satisface las condiciones de frontera parcial

$$\begin{aligned} g_1(0, y, z) &= T_1 & g_1(x, M, z) &= 0 \\ g_1(L, y, z) &= 0 & g_1(x, y, 0) &= 0 \\ g_1(x, 0, z) &= 0 & g_1(x, y, N) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

respectivamente para cada cara. En consecuencia, la función $v(\vec{x}, t)$ satisface la ecuación del calor con las condiciones

$$u(0, x, y, t) = v(0, x, y, t) + g(0, x, y). \quad (14)$$

Dado que $u(0, x, y, t) = g(0, x, y) = T_1$, se observa que la función $v(0, x, y, t)$ satisface condiciones de frontera homogéneas descritas en la primera parte de esta sección. Dicha función se resuelve en la forma descrita en la sección 3.1 por lo que la función $v(0, x, y, t)$ se escribe en la forma (7). Asimismo, la condición inicial se calcula como

$$u(x, y, z, 0) = v(x, y, z, 0) + g(x, y, z) \quad (15)$$

o bien

$$v(x, y, z, 0) = f(x, y, z) - g(x, y, z). \quad (16)$$

La función $v(x, y, z, t)$ se toma como la expansión en serie de Fourier para el caso homogéneo presentado en la ecuación (7), pero los coeficientes de Fourier tridimensional [16,19], [20] se calculan por medio de la expresión

$$\begin{aligned} A_{lmn} &= \\ \frac{8}{LMN} \int_0^L \int_0^M \int_0^N [f(x, y, z) - g(x, y, z)] \times \\ &\sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{M}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{N}\right) dx dy dz. \end{aligned} \quad (17)$$

4. Resultados

En esta sección se ilustra la efectividad y validez del modelo desarrollado en la sección anterior, mediante el análisis de un ejemplo significativo en las aplicaciones de Ingeniería y Física. Se toma como objeto de partida un sólido tridimensional cúbico con fines de claridad y precisión en la exposición de la solución. El sólido es preparado inicialmente con una distribución de calor que posee un hueco térmico esférico central, el cual representa una situación de interés práctico. Cabe señalar, que un modelo cúbico es ampliamente utilizado, dado que en la práctica la mayoría de pruebas físicas realizables a un material sujeto a tensiones o esfuerzos mecánicos utilizan esta geometría estándar además de impresiones tridimensionales [21,22].

4.1 Hueco térmico tridimensional

Se considera el caso de un cubo aislado, para ello se asume que el volumen está delimitado en la forma $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L, 0 \leq z \leq L\}$, es decir, $L = M = N$, como en la figura 2.

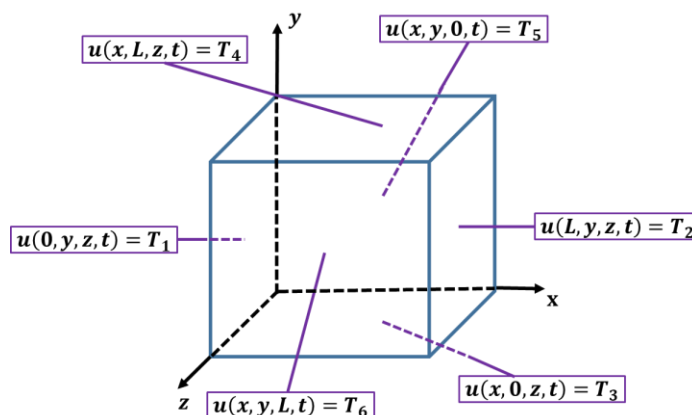


Figura 2. Sólido cúbico ideal donde las 6 caras se mantienen a temperaturas constantes.

En este caso la expresión (7) adquiere la forma

$$u(x, y, z, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{lmn} \sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \times e^{-(l^2+m^2+n^2)\alpha \frac{\pi^2}{L^2} t}. \quad (18)$$

Se mantienen las condiciones de frontera e inicial (10) y (8) respectivamente.

4.1.1 Descripción matemática del hueco térmico

Para esclarecer las características del método desarrollado, supondremos primeramente que la distribución inicial se comporta como un hueco térmico aproximadamente esférico, cuyo valor térmico aumenta exponencialmente hasta alcanzar un valor máximo. La distribución de temperatura es no uniforme, con un valor mínimo de 0°C en el centro del cubo y un valor máximo fijo de 90°C grados al tocar las caras; matemáticamente esto se expresa en la forma

$$f(x, y, z) = a_1 \left(1 - e^{-a_0((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)}\right). \quad (19)$$

En la ecuación (19), $a_0 = \frac{1}{0.0005m^2}$, $a_1 = 90^\circ\text{C}$ y (x_0, y_0, z_0) corresponde al centro del cubo, cuyas dimensiones son de 0.01 m por lado [22].

En la figura 3 se muestra la distribución inicial de temperatura, graficada con una dimensión fija. En la figura 3 a se ha graficado la traza $f(x, y, 0.05)$, la cual corresponde al tiempo $t = 0 \text{ min}$; se ve claramente que al centro del cubo en la coordenada $(x = 0.05 \text{ m}, y = 0.05 \text{ m})$ tiene un valor térmico de $T = 0^\circ\text{C}$ y en las caras aumenta a $T = 90^\circ\text{C}$ como valor máximo, observe la escala de temperaturas en el extremo derecho de la figura.

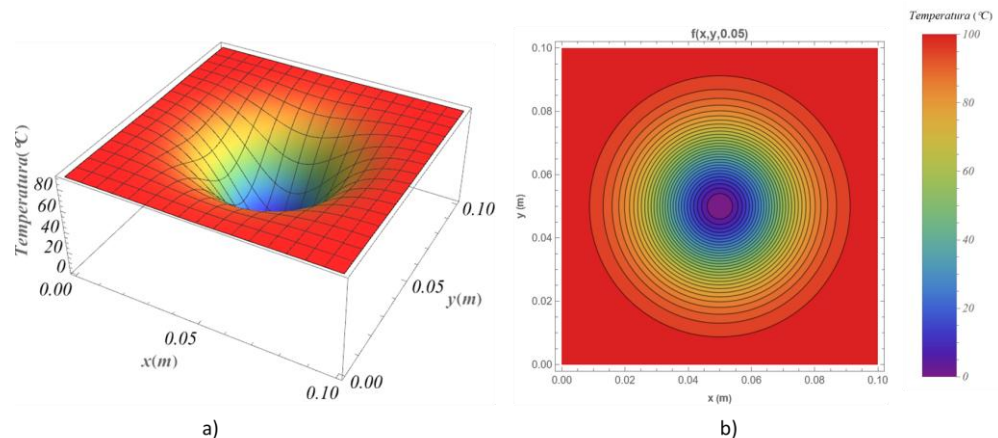


Figura 3. Trazo de la distribución inicial de temperaturas $f(x, y, 0.05)$ para un sólido cúbico ideal aislado. El inciso a) corresponde a la gráfica tridimensional considerando una de las dimensiones fija con $z = 0.05 \text{ m}$. El inciso b) corresponde a las curvas de nivel correspondientes tomando $z = 0.05 \text{ m}$ fijo y graficando las dimensiones (x, y) .

En la figura 3b se ha graficado un mapa de contorno $z = 0.01 \text{ m}$ para la misma traza $f(x, y, 0.05)$ donde se puede apreciar un comportamiento inicial cuasi esférico, sin embargo, es un incremento exponencial asintótico a la temperatura $T = 90^\circ\text{C}$ como temperatura máxima en las coordenadas x, y , con $z = 0.05 \text{ m}$ para $t = 0 \text{ min}$.

4.2 Paralelepípedo a distintas temperaturas

En este caso abordaremos la situación en la cual las caras del prisma se mantienen a distintas temperaturas, revisamos el caso general y posteriormente se plantean distintas situaciones de interés.

Como ya se mencionó, las caras de un prisma no necesariamente deben ser aisladas, en este caso se pueden mantener a una temperatura fija por lo que la solución a la ecuación del calor se modifica para incorporar dicha situación. Las condiciones de frontera son las que se enlistan en (10). De esta manera, las condiciones ya no son homogéneas, pero sí constantes. Para ello se propone una distribución de temperaturas en el caso estacionario $g(\vec{x})$, bajo esta hipótesis, es claro que $g_t(\vec{x}) = 0$ y como consecuencia la función $g(\vec{x})$ debe satisfacer la ecuación

$$\frac{\partial^2 g(\vec{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(\vec{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g(\vec{x})}{\partial z^2} = 0 \quad (20)$$

que es la Ecuación de Laplace [17,19]. La solución entonces se plantea como $u(\vec{x}, t) = v(\vec{x}, t) + g(\vec{x})$ [16].

Para poder calcular $\nabla^2 g(\vec{x}) = 0$, debemos hacer uso del principio de linealidad aplicable en este caso dado que la Ecuación de Laplace es una ecuación lineal, por lo tanto, la función $g(\vec{x})$ se establece como la superposición de seis funciones $g(\vec{x}) = g_1(\vec{x}) + g_2(\vec{x}) + g_3(\vec{x}) + g_4(\vec{x}) + g_5(\vec{x}) + g_6(\vec{x})$ y cada función $g_i(\vec{x})$ satisface las condiciones de frontera de la forma (13), para la función $g_2(\vec{x})$ las condiciones de frontera serían

$$\begin{aligned} g_2(0, y, z) &= 0 & g_2(x, M, z, t) &= 0 \\ g_2(L, y, z) &= T_2 & g_2(x, y, 0, t) &= 0 \\ g_2(x, 0, z) &= 0 & g_2(x, y, N, t) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

y así respectivamente para cada cara. La solución $v(0, x, y, t)$ satisface condiciones de frontera homogéneas, por ejemplo $u(0, y, z, t) = T_1 = v(0, y, z, t) + g(0, y, z) = v(0, y, z, t) + g_1(0, y, z) = v(0, y, z, t) + T_1$, de esta forma $v(0, y, z, t) = 0$, el mismo análisis se aplica para las restantes caras. Aplicando el método de separación de variables para resolver (20) sujeta a (10) se obtiene la solución general que se muestra en el apéndice A.

La solución mostrada en el apéndice A, considera el caso más general para el cual todas las caras se encuentran a distintas temperaturas, así como las dimensiones del prisma, sin embargo, teniendo en cuenta primordialmente la claridad en la exposición, restringiremos el análisis al caso cúbico para el cual las dimensiones de las caras son L , en particular se toma el valor de 0.01 m por lado [22]. También consideraremos que las caras perpendiculares a los ejes del espacio tridimensional se encuentran a la misma temperatura, es decir $T_1 = T_2, T_3 = T_4, T_5 = T_6$ con $T_1 = 10^\circ\text{C}, T_3 = 50^\circ\text{C}, T_5 = 90^\circ\text{C}$ respectivamente.

Asimismo, es importante señalar que la función $g(\vec{x})$ también se expresa como una superposición de funciones armónicas que convergen a la función en el límite infinito. Naturalmente por las limitaciones computacionales y considerando que la claridad en la exposición se mantiene, se ha truncado la solución en el apéndice tomando hasta $n=13$ términos de la serie. Como consecuencia, en los valores cercanos a la frontera de las caras e incluso en las caras se observan oscilaciones propias de las funciones causadas por una parte, por el truncamiento, y por otra, al fenómeno de Gibbs típico de las series de Fourier para funciones continuas por partes en el intervalo de interés [23]. Esto permite simplificar la expresión para $g(\vec{x})$ en gran medida y describir la dinámica de la distribución de temperaturas sin pérdida de información relevante.

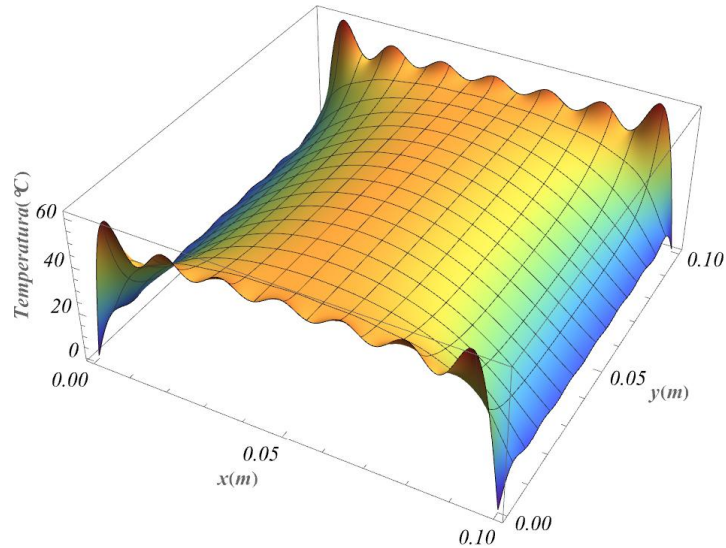


Figura 4: Distribución superficial de la Temperatura para la función $g(x, y, z)$ del apéndice A donde se han tomado los parámetros $L = 0.10 \text{ m}$, $T_1 = T_2 = 10^\circ\text{C}$, $T_3 = T_4 = 50^\circ\text{C}$, $T_5 = T_6 = 90^\circ\text{C}$, con $z = 0.05 \text{ m}$ para un sólido cúbico ideal.

En la figura 4 se muestra la solución de la ecuación de Laplace dada en (20). Los valores que se han tomado para ilustración son $T_1 = T_2, T_3 = T_4, T_5 = T_6$ con $T_1 = 10^\circ\text{C}, T_3 = 50^\circ\text{C}, T_5 = 90^\circ\text{C}$ respectivamente. En esta gráfica se observa la función $g(x, y, z)$ fijando la coordenada z en el centro del cubo, como $z = 0.05 \text{ m}$, de esta manera, la gráfica corresponde a las dimensiones x y y ; en el eje vertical se tiene la distribución de temperaturas estacionarias. Es posible apreciar que en los valores $x = 0 \text{ m}, 0.1 \text{ m}$ y $y = 0 \text{ m}, 0.1 \text{ m}$ coincide la temperatura previamente establecida en las condiciones de frontera (10). Las fluctuaciones que se observan en las fronteras corresponden al fenómeno de Gibbs, al utilizar funciones armónicas como aproximación de la solución, como se mencionó anteriormente se han tomado solo armónicos hasta $n=13$ [19]. De igual manera, la constante k se ha tomado con un valor de $18 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{min}}$ de acuerdo con los resultados reportados en [22].

En la figura 5 se muestran los mapas de contorno vistas perpendicularmente a los planos de las caras correspondientes. Por simetría de las temperaturas fijadas $T_1 = T_2, T_3 = T_4, T_5 = T_6$, en el ejemplo analizado, solo se muestran tres de las seis caras del cubo de estudio, con $T_1 = 10^\circ\text{C}, T_3 = 50^\circ\text{C}, T_5 = 90^\circ\text{C}$ respectivamente.

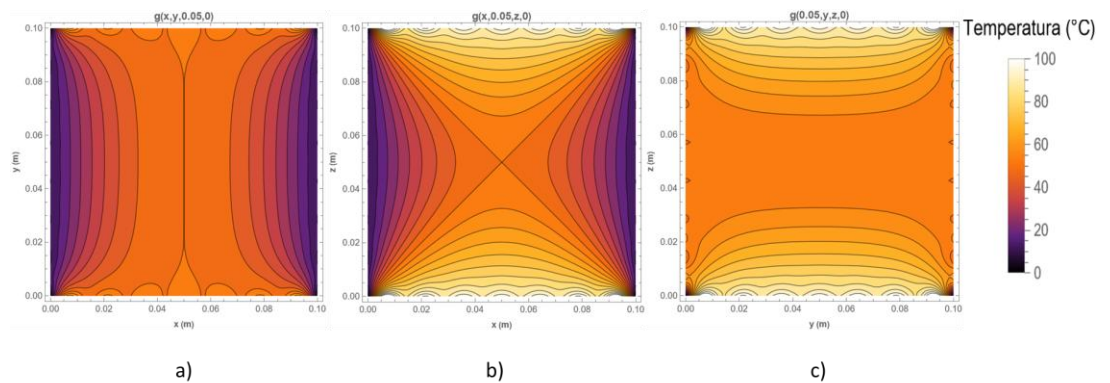


Figura 5. Mapas de Contorno para la función $g(x, y, z)$ donde se han tomado los valores $L = 0.10 \text{ m}$, $T_1 = T_2 = 10^\circ\text{C}$, $T_3 = T_4 = 50^\circ\text{C}$, $T_5 = T_6 = 90^\circ\text{C}$, a) isothermas de temperatura con $z = 0.05 \text{ m}$. b) isothermas de temperatura con $y = 0.05 \text{ m}$ y c) isothermas de temperatura con $y = 0.05 \text{ m}$.

En las gráficas 5a y 5c, de acuerdo con la escala de temperaturas mostrada en la misma figura, los gradientes de temperatura son graduales y semejantes dado que las diferencias de temperatura $\Delta T = T_3 - T_1 = T_5 - T_3 = 40^\circ\text{C}$ entre las caras adyacentes, no son relativamente bruscas. En cambio en la figura 5b se observan diferencias significativas en los cambios de temperatura entre las caras adyacentes $\Delta T = T_5 - T_1 = 80^\circ\text{C}$. En las tres figuras, 5a, 5b y 5c, se muestran nuevamente las fluctuaciones que corresponden al fenómeno de Gibbs tomando $n=13$ [23].

4.3 Evolución del problema de Dirichlet con un hueco térmico

En este apartado se analiza la evolución del problema de Dirichlet considerando la distribución inicial del apartado 4.1.1. Se considera un cubo de dimensiones $L = 0.1 \text{ m}$ con temperaturas fijas y constantes en las caras del cubo como condiciones de frontera. Para ello se utiliza la solución $u(x, y, z, t)$ descrita en la ecuación (10) donde se toma la función $g(\vec{x})$ presente en el apéndice A, y descrita en el apartado 4.2. La función $v(x, y, z, t)$ se toma como la expansión en serie de Fourier para el caso homogéneo presentado en la ecuación (7), donde los coeficientes se calculan usando la expresión (17) con $L = M = N$. Los resultados principales de la modelación de la distribución de la temperatura de esta situación se muestran en las gráficas 6 y 7. Los resultados se obtuvieron con el software Wolfram Mathematica versión 14.2. La suma en la solución se tomó hasta $n = 11$ lo que arroja resultados suficientemente confiables. La evolución se toma dentro de los primeros 90 minutos y la constante k se ha tomado con un valor de $18 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{min}}$.

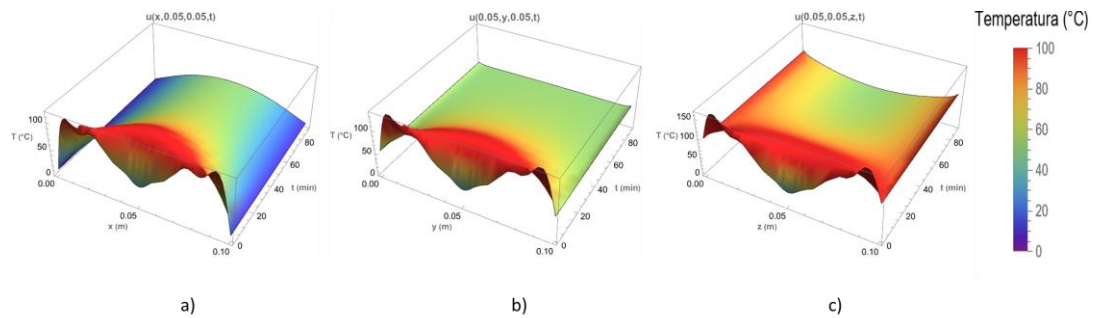


Figura 6. Gráficas Tridimensionales para la evolución de la función $u(x, y, z, t)$ en cada cara, con $L = 0.10 \text{ m}$. a) Traza de la función $u(x, 0.05 \text{ m}, 0.05 \text{ m}, t)$. b) Traza de la función $u(0.05 \text{ m}, y, 0.05 \text{ m}, t)$ y c) Traza de la función $u(0.05 \text{ m}, 0.05 \text{ m}, z, t)$.

Las gráficas de la figura 6, reflejan la evolución del problema planteado en el párrafo anterior. En los primeros 20 minutos ocurren los cambios más significativos en la evolución del sistema. En este lapso de tiempo, se observan las características de un hueco térmico, aparecen ondulaciones que corresponden a la suma de los primeros 11 armónicos esféricos, cantidad suficiente para apreciar el comportamiento de la distribución inicial. Con el paso del tiempo en la figura 6a se observa que en las caras perpendiculares al eje x se mantiene la temperatura de frontera de $T = 10^\circ\text{C}$. Sin embargo, el hueco térmico desaparece evolucionando a una temperatura promedio superior de $T = 52^\circ\text{C}$ aproximadamente obligada por las temperaturas de frontera en las caras. Esto se puede observar análogamente en las figuras 6b y 6c donde las temperaturas de frontera también prevalecen en la evolución, pero el hueco térmico desaparece mientras la temperatura aumenta a $T = 52^\circ\text{C}$. En el caso de la figura 6b la evolución hacia la temperatura promedio es lenta y el gradiente de temperatura es moderado. En cambio, en la figura 6c la temperatura de frontera, inicialmente de $T = 90^\circ\text{C}$, desciende suavemente a $T = 52^\circ\text{C}$.

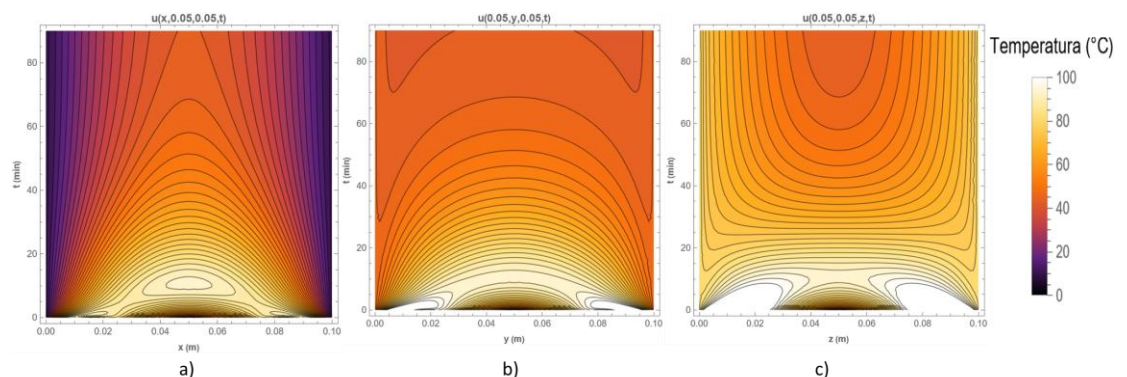


Figura 7- Mapas de Contorno para la evolución de la función $u(x, y, z, t)$ donde se han tomado los valores $L = 0.10 \text{ m}$, $T_1 = T_2 = 10^\circ\text{C}$, $T_3 = T_4 = 50^\circ\text{C}$, $T_5 = T_6 = 90^\circ\text{C}$, a) isothermas de temperatura con $y = z = 0.05 \text{ m}$. b) isothermas de temperatura con $x = z = 0.05 \text{ m}$ y c) isothermas de temperatura con $x = y = 0.05 \text{ m}$.

Asimismo, desde otra perspectiva y para mayor claridad en el análisis de la evolución térmica, se presentan en la figura 7, los mapas de contorno para una variable espacial fija y otra temporal en los tres ejes x, y, z . En este caso los comportamientos son visiblemente diferentes y nos dan una mayor precisión en las isotermas que ocurren al interior del sólido cúbico. Los gradientes de temperatura son marcados en los primeros 20 minutos de evolución. Nuevamente las temperaturas en las caras perpendiculares respectivas de cada eje espacial son estables a lo largo de la evolución mostrando un incremento de temperatura en el punto central del sólido cúbico pero la evolución es distinta desde cada una de las caras hacia el interior.

En la figura 6a se observa que, en las caras perpendiculares al eje x se mantiene la temperatura de frontera de $T = 10^{\circ}\text{C}$, suponiendo que este valor térmico es relativamente bajo, los cambios son más abruptos aumentando hacia el centro a la temperatura promedio de $T = 52^{\circ}\text{C}$. En el caso de la figura 7b la fluctuación es ligeramente suave dado que la temperatura en las caras perpendiculares al eje y es aproximadamente igual al valor térmico promedio al que se converge en la evolución. Esto se puede apreciar en las tonalidades presentes en las figuras, comparadas con la escala mostrada en el extremo derecho de la figura 7. En cambio en la figura 7c, la temperatura de las caras perpendiculares al eje z desciende dado que es superior al valor promedio de $T = 52^{\circ}\text{C}$ que se alcanza en la evolución.

Es evidente que los fenómenos térmicos han sido estudiados con minuciosidad desde hace más de trescientos años. De igual forma la teoría aceptada y funcional que los describe se sustenta en la Ecuación del Calor que nació casi en el mismo periodo de tiempo. Aun cuando los métodos matemáticos para resolver problemas aplicados se han fortalecido con el desarrollo de la tecnología, la forma de abordar y exponer el fenómeno térmico puede ser en algunos casos no tan clara. En el trabajo de Abdisa [24] se hace una excelente exposición de la solución a la ecuación del calor incluyendo el método de la transformada de Fourier pero se restringe al caso unidimensional. Muchos trabajos se centran en el marco de una variable temporal y una espacial por ser más sencilla la interpretación, pero para problemas prácticos se requiere la expansión a 3 dimensiones. Así también lo hacen en el trabajo de Zathiha [25] donde la exposición aborda el caso de una varilla unidimensional donde se analizan las soluciones en términos de series de Fourier y su rapidez de convergencia a la solución fundamental.

A diferencia de esos trabajos, en el presente manuscrito, se contempla una deducción minuciosa de la Ecuación del Calor, exponiendo las ideas fundamentales de la física que se encuentra detrás de su solución. Además se mantiene el enfoque de tres variables espaciales considerando un sólido general y el tiempo para la evolución, la exposición se realiza considerando principalmente la claridad en el desarrollo. Asimismo Khan et al. [26] encuentran soluciones para las ecuaciones de calor y de onda de orden fraccionario, éstas se resuelven mediante el uso del método

de descomposición basado en la transformada natural. Aun cuando se resuelve la ecuación del calor, el objetivo principal en este artículo es destacar la aplicabilidad del método propuesto como una herramienta útil en la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Esto hace que la exposición sea matemáticamente especializada y también en dichos trabajos se centran en una dimensión espacial y el tiempo. En contraste, nuestro trabajo busca enfatizar el origen físico de la ecuación del calor y la claridad en la deducción de la solución ampliada a tres dimensiones más el tiempo, se aborda un caso ilustrativo de aplicación que resulta interesante en varios campos de la ingeniería, física, química, entre otras áreas.

5. Conclusiones

En el presente trabajo se desarrolla, de manera clara y rigurosa, la solución analítica para la distribución de temperatura en un paralelepípedo con temperaturas constantes pero desiguales en las caras del mismo. El análisis se hace desde una perspectiva tridimensional con suficiente generalidad, con el fin de establecer un marco teórico para diversos estudios de interés. Asimismo, el presente trabajo constituye una referencia útil para la validación de métodos numéricos y para el análisis de problemas de conducción de calor en geometrías rectangulares. En particular para ilustrar la solución obtenida se analiza la distribución térmica en el caso de un sólido cúbico, donde las caras paralelas se mantienen a la misma temperatura y existe inicialmente un hueco de temperatura central.

En el análisis hecho en este artículo, se ha observado que se requieren condiciones de frontera para las cuales es necesario resolver la ecuación de Laplace no trivial con el fin de obtener la distribución de frontera tridimensional. Asimismo al analizar la evolución temporal, se observa un comportamiento consistente con las predicciones del modelo de la ecuación del calor y en concordancia con las leyes vigentes de la termodinámica. En particular, para el caso de un hueco térmico, se registra una redistribución homogénea de temperatura para alcanzar un valor constante en la evolución del sistema bajo las condiciones de frontera fijas y el truncamiento de la serie utilizado. En las caras del cubo se observa que la temperatura desciende al valor de equilibrio y en otras caras aumenta al mismo, lo cual es un resultado relevante ya que, en el caso aislado, se esperaría que la temperatura dentro del sólido disminuyera con el tiempo.

Este caso se estudió bajo condiciones de frontera a temperatura fija, donde el objeto posee una distribución uniforme de temperatura en la frontera. El estudio de configuraciones con dimensiones diferentes del paralelepípedo y temperaturas desiguales en cada cara se reserva para una futura ampliación de este trabajo.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los revisores sus valiosas observaciones y sugerencias durante la revisión del manuscrito. Se hace una especial dedicación en la

elaboración de este trabajo a la Sra. Celia Loreto Estrada y al Sr. Cipriano Aguilar García.

Apéndice A

En este apartado se muestra la solución general a la Ecuación de Laplace aplicando el método analítico de separación de variables como se mencionó en la sección 4.2 la solución se presenta como una superposición de soluciones que resuelven las condiciones de frontera (13) en este caso, la solución (16) se obtiene incorporando las siguientes expresiones

$$g_1(x, y, z) = \frac{4T_1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sinh \left(\pi \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(\frac{n}{N}\right)^2} (x - L) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{M} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi z}{N} \right) \quad (A.1)$$

con

$$A_{mn} = \frac{(1 - \cos(m\pi))(1 - \cos(n\pi))}{mn \sinh \left(-\pi L \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(\frac{n}{N}\right)^2} \right)}, \quad (A.2)$$

$$g_2(x, y, z) = \frac{4T_2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sinh \left(\pi \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(\frac{n}{N}\right)^2} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{M} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi z}{N} \right) \quad (A.3)$$

con

$$B_{mn} = \frac{(1 - \cos(m\pi))(1 - \cos(n\pi))}{mn \sinh \left(\pi L \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(\frac{n}{N}\right)^2} \right)}, \quad (A.4)$$

$$g_3(x, y, z) = \frac{4T_3}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{ln} \sinh \left(\pi \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{N}\right)^2} (y - M) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi z}{N} \right) \quad (A.5)$$

con

$$A_{ln} = \frac{(1 - \cos(l\pi))(1 - \cos(n\pi))}{\ln \sinh \left(-\pi M \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{N}\right)^2} \right)}, \quad (A.6)$$

$$g_4(x, y, z) = \frac{4T_4}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{ln} \sinh \left(\pi \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(\frac{n}{N}\right)^2} y \right) \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi z}{N} \right) \quad (A.7)$$

con

$$D_{ln} = \frac{(1 - \cos(l\pi))(1 - \cos(n\pi))}{\ln \sinh \left(\pi M \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{N}\right)^2} \right)}, \quad (A.8)$$

$$g_5(x, y, z) = \frac{4T_5}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_{lm} \sinh \left(\pi \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{M}\right)^2} (z - N) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{M} \right) \quad (A.9)$$

con

$$E_{lm} = \frac{(1 - \cos(l\pi))(1 - \cos(m\pi))}{\ln \sinh \left(-\pi N \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{M}\right)^2} \right)}, \quad (A.10)$$

$$g_6(x, y, z) = \frac{4T_6}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{lm} \sinh \left(\pi \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{M}\right)^2} z \right) \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{M} \right) \quad (28)$$

con

$$F_{lm} = \frac{(1 - \cos(l\pi))(1 - \cos(m\pi))}{\ln \sinh \left(\pi N \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{M}\right)^2} \right)}. \quad (A.11)$$

Referencias

1. J. A. Acevedo-Díaz, A. García-Carmona, M. del M. Aragón-Méndez, and J. M. Oliva-Martínez, "Modelos científicos: significado y papel en la práctica científica," *Revista Científica*, vol. 30, no. 3, pp. 155–166, 2017, doi:10.14483/23448350.12288
2. M. de los A. Bizzio, A. M. Guirado, and C. I. Maturano Arrabal, "Uso de simulaciones científicas interactivas para fortalecer la formación inicial de docentes de Química," *Revista Educación*, vol. 48, no. 1, pp. 522–542, 2024, doi:10.15517/revedu.v48i1.56052
3. C. Ruiz-Martin, "Theory and foundations of modeling and simulation," *SIMULATION*, vol. 99, no. 5, pp. 431–432, 2023, doi:10.1177/00375497231171140
4. C. Tamayo-Roca, M. Roca-Revilla, and G. Nápoles-Quiñones, "La modelación científica: algunas consideraciones teórico-metodológicas," *Revista Santiago*, no. 42, pp. 79–90, 2017.
5. M. Berges Díaz, "La modelación como método teórico de la investigación educativa," *Revista Varela*, vol. 9, no. 24, pp. 62–74, 2009.
6. T. Ting, X. Wang, W. Chen, and C. Wang, "Model calibration and validation from a statistical inference perspective," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 410, Art. no. 115771, 2023, doi:10.1016/j.cma.2023.115771
7. J. Paquette-Rufiange, P. Lemaire, and C. Gogu, "Optimal design of validation experiments for the prediction of quantities of interest," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 412, Art. no. 115889, 2023, doi:10.1016/j.cma.2023.115889
8. I. J. Dahabreh, J. A. Chan, A. Earley *et al.*, *Modeling and Simulation in the Context of Health Technology Assessment: Review of Existing Guidance, Future Research Needs, and Validity Assessment*, Methods Research Report. Rockville, MD, USA: Agency for Healthcare Research and Quality (US), Jan. 2017.
9. D. Sornette, R. Woodard, W.-X. Zhou, and S. N. Pisarenko, "General strategy for physics-based model validation," *Computational Mechanics*, vol. 41, no. 5, pp. 741–752, 2008, doi:10.1007/s00466-007-0160-5
10. C. D. Anderson, "The positive electron," *Physical Review*, vol. 43, no. 6, pp. 491–494, 1933, doi:10.1103/PhysRev.43.491.
11. B. P. Abbott *et al.*, "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger," *Physical Review Letters*, vol. 116, no. 6, Art. no. 061102, 2016, doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102
12. G. Aad *et al.* (ATLAS Collaboration), "Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC," *Physics Letters B*, vol. 716, no. 1, pp. 1–29, 2012, doi:10.1016/j.physletb.2012.08.020
13. M. T. Marvila, A. R. G. Azevedo, and S. N. Monteiro, "Verification of the application potential of the mathematical models of Lyse, Abrams and Molinari in mortars based on cement and lime," *Journal of Materials Research and Technology*, vol. 9, no. 4, pp. 7327–7334, 2020, doi:10.1016/j.jmrt.2020.04.077
14. W. Yue and B. Wang, "Ceramic-added lime and cement mortars: A review of applications in building products," *Science Progress*, vol. 107, no. 3, 2024, doi:10.1177/00368504241266559
15. R. Haberman, *Elementary Applied Partial Differential Equations: With Fourier Series and Boundary Value Problems*, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1987.
16. G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 4th ed. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1995.

17. J. Fourier, *The Analytical Theory of Heat*, A. Freeman, Trans. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1878.
18. R. B. Guenther and J. W. Lee, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. New York, NY, USA: Dover Publications, 1996.
19. R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1941.
20. L. Debnath and D. Bhatta, *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, 4th ed. Boston, MA, USA: Birkhäuser, 2007.
21. J. J. Avila-Navarrete and J. A. Muñoz-Gómez, "Pasta cerámica de bajo costo para impresión 3D," *Revista Ciencia Aplicada*, vol. 1, no. 1, pp. 10–22, 2025, doi:10.66482/m15k1012
22. O. Aguilar-Loreto, J. J. Avila-Navarrete, and A. Jiménez-Pérez, "Análisis y modelado de la distribución térmica en morteros," *Revista Ciencia Aplicada*, vol. 1, no. 1, pp. 70–84, 2025.
23. W. J. Thompson, "Fourier series and the Gibbs phenomenon," *American Journal of Physics*, vol. 60, no. 5, pp. 425–429, 1992, doi:10.1119/1.16895
24. L. T. Abdisa, "One Dimensional Heat Equation and its Solution by the Methods of Separation of Variables, Fourier Series and Fourier Transform," *J. Appl. Comput. Math.*, vol. 10, no. 5, pp. 1–6, 2021.
25. M. M. Zathiha and M. A. A. M. Faham, "Analytical Solutions of One-Dimensional Heat Equation Using Separation of Variables Method," *Journal of Science-FAS-SEUSL*, vol. 5, no. 1, pp. 1–24, Jun. 2024.
26. H. Khan, R. Shah, P. Kumam, and M. Arif, "Analytical solutions of fractional-order heat and wave equations by the Natural Transform Decomposition Method," *Entropy*, vol. 21, no. 6, Art. no. 597, 2019, doi:10.3390/e21060597