

Modelación matemática del calor en un sólido cúbico

Omar Aguilar-Loreto

Departamento de Ingenierías, Universidad de Guadalajara CUCSUR, 48902, Autlán de Navarro, Jalisco, México.

Resumen: El estudio del calor y de su propagación en distintos medios ha sido de interés para la comunidad científica desde hace varios siglos. En este trabajo se presenta, de manera clara y concisa, un esquema general para la modelación analítica de la propagación del calor. En particular, se analiza la distribución de temperaturas en un sólido cúbico aislado sometido a una fuente de calor constante en estado estacionario, desarrollando los modelos correspondientes bajo las condiciones iniciales y de frontera más comunes. Para el caso del sólido aislado se consideran dos escenarios representativos de distribuciones iniciales de temperatura y se estudia su evolución temporal.

Palabras clave: modelación matemática; ecuación del calor; gradiente temperatura; hueco térmico.

1. Introducción

El estudio del calor y otras magnitudes físicas ha traído como consecuencia, el desarrollo de un marco científico y eficaz por medio del cual se pueda reproducir algunos fenómenos físicos en forma controlada. La mayoría de las veces no es posible estudiarlo de manera directa, ya que depende de varios factores sobre los cuales no se puede tener control, y que en ocasiones quedan fuera del alcance del experimentador [1]. Tales factores pueden ser de índole económica, involucrar materiales aún no explorados, requerir condiciones ideales que no se presentan cotidianamente, o implicar la falta de muestras específicas, entre otros. Por estas razones, el científico se ve obligado a reproducir los fenómenos bajo condiciones restringidas. Con el desarrollo de la tecnología, hoy en día existen diversos recursos para lograrlo, como computadoras y software especializado [2,3].

En situaciones como las anteriormente descritas, es preciso y necesario recurrir al concepto de modelación [1], [4,5]. La modelación permite reproducir un fenómeno físico que no puede ser estudiado de forma directa. Desde luego, siempre representa una aproximación a la situación real. No obstante, aunque el modelo está sustentado en lógica matemática y sea consistente con los modelos aceptados hasta la fecha, la experimentación sigue siendo el criterio que determina su validez [6-8]. Ejemplos notables de este esquema en particular en la Física [9] incluyen la predicción de la antimateria a partir de las ecuaciones de Dirac [10], las ondas gravitacionales [11] o el bosón de Higgs [12].

En este contexto, en el presente trabajo se propone el modelo para el estudio del calor, que hoy en día es un esquema bien conocido pero no con la suficiente

transparencia y con la concisión en la deducción de sus principios fundamentales y que sea claro de abordar.

Este marco teórico permite ofrecer un primer acercamiento al estudio de diversos materiales que brindan una oportunidad idónea para analizar fenómenos físicos complejos bajo condiciones delimitadas, considerando al calor como una de sus características sobresalientes. La mayoría de materiales se consideran como un sistema multiparamétrico en el que intervienen procesos térmicos y mecánicos, susceptibles de ser modelados mediante métodos matemáticos y computacionales [13]. Por ejemplo, el material mortero es utilizado, tanto en aplicaciones estructurales como no estructurales, junto con su disponibilidad y bajo costo, lo convierten en un candidato viable para simular y analizar la evolución del calor [14]. Esto permite explorar fenómenos asociados al comportamiento de materiales cementantes, además de que constituye un medio práctico y representativo para validar modelos físicos aplicables a sistemas más complejos.

La novedad de este trabajo radica en la claridad de la exposición del método analítico comúnmente utilizado en todos los ámbitos científicos para modelar el calor, utilizando las herramientas de las ecuaciones diferenciales parciales en todo el proceso, desde la deducción—donde se desarrolla explícitamente todo el proceso para llegar a la ecuación del calor—, hasta la exposición de dicho método con ejemplos claros que describen situaciones físicas de interés en varios ámbitos del modelado científico. Hasta donde tenemos conocimiento, el abordar el modelado matemático para 3+1 dimensiones no se ha presentado en forma extensa y explícita anteriormente.

En la siguiente sección se da un panorama físico para reconocer las cantidades fundamentales, que intervienen en la caracterización del modelo del calor así como su definición. En el apartado 3 se establece el principio universal de la conservación de la energía como el pilar esencial en la deducción del modelo. En la sección 4 se establecen las bases para deducir minuciosamente la ecuación del calor con la suficiente consistencia, se describe la situación desde el punto de vista tridimensional más general. Los resultados principales, a manera de consecuencia y ejemplos del modelo desarrollado en la sección anterior de este artículo, se exponen en la sección 5. Finalmente en la sección 6 se describen las conclusiones así como las ideas que se abordarán en un artículo posterior.

2. Variables Macroscópicas

La Capacidad Calorífica (C) es una medida de la resistencia de un cuerpo para incrementar su temperatura al suministrar calor al mismo, sin embargo, cabe distinguir entre lo que es temperatura y calor. El calor es una medida de la energía térmica, mientras que la temperatura corresponde a la medida macroscópica de un cuerpo de la cantidad de energía térmica acumulada en el cuerpo. En virtud de esto podemos definir, la capacidad calorífica como

$$C = \frac{e}{u} \quad (1)$$

donde e corresponde a la cantidad de energía térmica en Joules y u representa la temperatura en Kelvin en el Sistema Internacional de Unidades (SI). De la misma forma, la capacidad calorífica está relacionada con la cantidad de masa a la cual se le suministra calor. De aquí, surge el concepto de calor específico, que es la capacidad calorífica por unidad de masa m (en kg), $c = C/m$ el concepto de calor específico depende en gran medida de la distribución de masa en un material por lo que puede ser modelado con una función escalar que dependa de la posición del volumen que ocupa el objeto, $c(\vec{x})$ con $\vec{x} = (x, y, z)$ en coordenadas cartesianas. El calor específico depende también de la densidad de masa (ρ) del material esto es, la cantidad de masa almacenada en ese mismo volumen (m^3), se define como $\rho = m/V$ donde m es la distribución de masa en el volumen (V) a considerar [15].

Asimismo, el objeto puede tener una distribución de masa no uniforme por lo que la densidad se puede modelar con una función escalar $m(\vec{x})$, si expresamos la masa de un cuerpo en términos de su densidad de masa se tiene $m(\vec{x}) = \rho(\vec{x})V$. De lo anterior podemos deducir que la capacidad calorífica se puede expresar como

$$C(\vec{x}) = c(\vec{x})\rho(\vec{x})V. \quad (2)$$

3. Conservación de la Energía

La dinámica de la energía térmica dentro del objeto de interés se puede conseguir al estudiar la cantidad de calor que existe dentro del cuerpo y sus aportaciones internas como externas, para ello es necesario preservar el principio universal de la conservación de la energía durante un proceso evolutivo [15], [16]. De esta manera podemos enunciar la conservación de la energía para un sólido arbitrario en la forma que sigue

$$\begin{aligned} \text{cambios en la cantidad de calor} &= \text{flujo de calor interno o externo} \\ &+ \text{fuentes de calor} \end{aligned}$$

los cambios que surjan en la cantidad de energía térmica en el objeto de estudio, son expresados por medio de $\partial e / \partial t$, que es la derivada parcial con respecto al tiempo t (en seg.). El flujo de calor existente que penetra o escapa en el cuerpo a través de una determinada sección transversal de superficie finita se modela por medio de una función que depende de las coordenadas espaciales $\vec{x} = (x, y, z)$ y el tiempo (t) que usualmente se denota por $\varphi(\vec{x}, t)$ y está dada en unidades de cantidad de calor sobre unidad de tiempo sobre unidad de superficie (J/sm^2 en el SI). En último término pueden existir aportaciones internas de calor posiblemente por reacciones químicas o nucleares o de otra naturaleza, al interior del objeto, que se pueden modelar por medio de una función $Q(\vec{x}, t)$ (J/sm^2 en el SI).

Al formular lo anterior en términos matemáticos se obtiene lo siguiente

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \varphi(\vec{x}, t) + Q(\vec{x}, t). \quad (3)$$

4. Objeto Tridimensional

En el caso de objetos tridimensionales comenzaremos con un sólido arbitrario y la evolución de la distribución del calor en el mismo. En el caso de un objeto arbitrario que ocupa un volumen V , se deben sumar todas las contribuciones a la cantidad de energía térmica total del objeto, esto se ve reflejado en la ecuación (4) al adquirir la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{Volumen} c(\vec{x}) \rho(\vec{x}) u(\vec{x}, t) dV \right) = - \oint_{Area} \vec{\varphi}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{S} + \iiint_{Volumen} Q(\vec{x}, t) dV. \quad (4)$$

Se observa que la función $u(\vec{x}, t)$ describe la distribución de temperatura como una magnitud física, macroscópicamente medible. El primer término del segundo miembro de la ecuación, se interpreta como el flujo de calor que ocurre a través de una sección transversal muy pequeña de área denotada por $d\vec{S}$. La función $\vec{\varphi}(\vec{x}, t)$ denominado vector de flujo calórico, ahora adquiere un carácter vectorial al extender el caso a tres dimensiones, por lo que es necesario hacer la proyección de este vector sobre el vector perpendicular (normal) a la superficie del volumen que ocupa el sólido, notemos que si el volumen es finito, la superficie es cerrada de ahí la notación en la integral [15]. También es importante notar que la normal apunta hacia el exterior del volumen, de esta manera los cambios de flujo en el interior del volumen se consideran con signo negativo. Por último, el segundo término del segundo miembro de la ecuación (4) representa el rastreo de las posibles fuentes de calor al interior del objeto.

El primer término del segundo miembro de la ecuación (4) se puede modificar haciendo uso del teorema de la divergencia de Gauss [16]

$$\oint_{Area} \vec{A}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{S} = \iiint_{Volumen} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) dV. \quad (5)$$

Siempre y cuando el cuerpo que ocupa el material sea globalmente homogéneo y la hipótesis de que la función vectorial $\vec{A}(\vec{x}, t)$ sea una función continua y diferenciable en el volumen que ocupa el sólido. La ecuación (4) adquiere la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{Volumen} c(\vec{x}) \rho(\vec{x}) u(\vec{x}, t) dV \right) = - \iiint_{Volumen} \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}, t) dV + \iiint_{Volumen} Q(\vec{x}, t) dV. \quad (6)$$

Si una integral definida en un volumen arbitrario es cero, entonces su integrando es nulo, de donde se deduce la expresión

$$c(\vec{x}) \rho(\vec{x}) \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}, t) + Q(\vec{x}, t) \quad (7)$$

que es la Ecuación del Calor (o Difusión).

4.1. Ley del Flujo del Calor de Fourier

Hacia 1822 Joseph Fourier postula el principio por el cual se conduce el calor a través de objetos metálicos bidimensionales [17], el cual es proporcional al negativo del gradiente de temperatura

$$\vec{\varphi}(\vec{x}, t) = -K_0(\vec{x}) \vec{\nabla} u(\vec{x}, t) \quad (8)$$

donde el término $K_0(\vec{x})$ se conoce como conductividad térmica y puede depender del material.

Finalmente, al sustituir en la ecuación (8) se obtiene

$$c(\vec{x}) \rho(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot (K_0(\vec{x}) \vec{\nabla} u(\vec{x}, t)) + Q(\vec{x}, t) \quad (9)$$

esta es la ecuación del calor en su forma más general.

En este desarrollo, podemos considerar que el material es homogéneo y uniforme además de isótropo por lo que la densidad de masa, el calor específico y la conductividad del mismo son constantes. También hemos supuesto que no existen fuentes de calor al interior del cuerpo, es decir, $Q(\vec{x}, t) = 0$ de esta forma la ecuación del calor se expresa como

$$\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} = k \nabla^2 u(\vec{x}, t). \quad (10)$$

donde $k = K_0/c\rho$ es la Difusividad Térmica del material [15, 18].

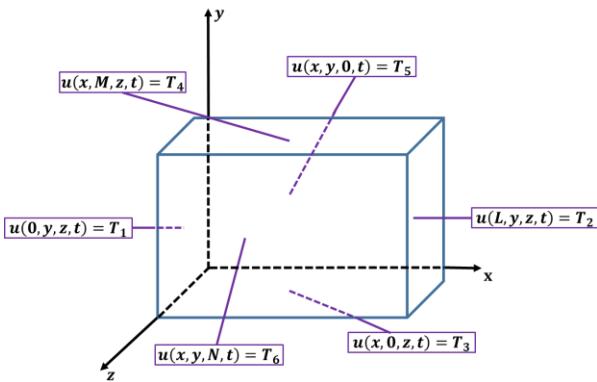


Figura 1: Un sólido rectangular ideal con las 6 caras sometidas a distintas temperaturas en el esquema general.

Al usar los métodos de la Física-matemática se puede encontrar la solución a la ecuación (10) [15,16],[18] donde hemos considerado un prisma rectangular con dimensiones $L \times M \times N$ es decir el volumen esta delimitado en la forma $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq M, 0 \leq z \leq N\}$, observe la figura 1, de esta manera se tiene

$$u(x, y, z, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{lmn} \sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{M}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{N}\right) e^{-\left(\frac{(l\pi)^2}{L^2} + \frac{(m\pi)^2}{M^2} + \frac{(n\pi)^2}{N^2}\right)\alpha t} \quad (11)$$

En esta solución hemos considerado que todas las caras del rectángulo están aisladas, en la figura 1 basta tomar $T_1 = T_2 = \dots = T_6 = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} u(0, y, z, t) &= 0 & u(L, y, z, t) &= 0 \\ u(x, 0, z, t) &= 0 & u(x, M, z, t) &= 0 \\ u(x, y, 0, t) &= 0 & u(x, y, N, t) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Asimismo, se ha supuesto que inicialmente se tiene una distribución de temperatura específica

$$u(x, y, z, t = 0) = f(x, y, z) \quad (13)$$

4.2. Caras de un prisma a temperatura constante

Las caras de un prisma no necesariamente deben ser aisladas, en este caso se pueden mantener a una temperatura fija por lo que la solución a la ecuación del calor se modifica ligeramente, en las condiciones de frontera

$$\begin{aligned}
 u(0, y, z, t) &= T_1 & u(L, y, z, t) &= T_2 \\
 u(x, 0, z, t) &= T_3 & u(x, M, z, t) &= T_4 \\
 u(x, y, 0, t) &= T_5 & u(x, y, N, t) &= T_6
 \end{aligned} \tag{14}$$

Para encontrar una solución que satisfaga (10) junto con (14), buscamos una función que describa la distribución de temperaturas para el caso estacionario que llamaremos $g(\vec{x})$, esta función satisface $g_t(\vec{x}) = 0$ por lo tanto, $\nabla^2 g(\vec{x}) = 0$, la función $g(\vec{x})$ satisface la ecuación de Laplace [16,18]. La solución se propone entonces de la siguiente forma [15]

$$u(\vec{x}, t) = v(\vec{x}, t) + g(\vec{x}) \tag{15}$$

donde

$$g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^6 g_i(\vec{x}) \tag{16}$$

y cada función $g_i(\vec{x})$ satisface las condiciones de frontera

$$\begin{aligned}
 g_1(0, y, z, t) &= T_1 & g_1(L, y, z, t) &= 0 \\
 g_1(x, M, z, t) &= 0 & g_1(x, M, z, t) &= 0 \\
 g_1(x, y, N, t) &= 0 & g_1(x, y, N, t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

respectivamente para cada cara. En consecuencia, la función $v(\vec{x}, t)$ satisface la ecuación del calor con las condiciones

$$u(0, x, y, t) = v(0, x, y, t) + g(0, x, y) \tag{18}$$

por lo tanto la solución $v(0, x, y, t)$ satisface condiciones de frontera homogéneas y se escribe en la forma (12), la condición inicial se calcula

$$u(x, y, z, 0) = v(x, y, z, 0) + g(x, y, z) \tag{19}$$

o bien

$$f(x, y, z) = v(x, y, z, 0) + g(x, y, z) \tag{20}$$

donde los coeficientes en la expansión en serie de Fourier tridimensional [15], [19,20] vienen dados por

$$\begin{aligned}
 A_{lmn} = & \\
 \int_0^N \int_0^L \int_0^M [f(x, y, z) - g(x, y, z)] \times & \\
 \sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{M}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{N}\right) dx dy dz. & \quad (21)
 \end{aligned}$$

5. Resultados

En esta sección se exponen algunos casos ejemplares, en los que se ilustra la efectividad y validez del modelo desarrollado en la sección anterior. Se toma como objeto de partida un sólido tridimensional cúbico aislado, esto se establece cuando las condiciones de frontera son homogéneas. El sólido es preparado inicialmente con 2 distribuciones de calor, que describen situaciones de interés en las aplicaciones. Cabe señalar que se considera un modelo cúbico, dado que en la práctica la mayoría de pruebas físicas realizables a un material sujeto a tensiones o esfuerzos mecánicos utilizan esta geometría estándar además de impresiones tridimensionales [21].

5.1 Sólido Cúbico Aislado

Tomemos como ejemplo, el caso de un sólido cúbico aislado, para ello suponemos que el volumen esta delimitado en la forma $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq M, 0 \leq z \leq N\}$, con $L = M = N$, como en la figura 2, en este caso la expresión (11) adquiere la forma

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) = & \\
 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{lmn} \sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) & \quad (22) \\
 \times e^{-(l^2+m^2+n^2)\alpha \frac{\pi^2}{L^2} t}.
 \end{aligned}$$

Para la condición inicial

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \quad (23)$$

la expresión (22) adquiere la forma

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) = & \\
 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{lmn} \sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) & \quad (24)
 \end{aligned}$$

que es una expansión en serie tridimensional de Fourier para la función $f(x, y, z)$ donde los coeficientes se calculan a partir de

$$A_{lmn} =$$

$$\int_0^L \int_0^L \int_0^L f(x, y, z) \times \quad (25)$$

$$\sin\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dx dy dz$$

y se mantienen las condiciones de frontera (12).

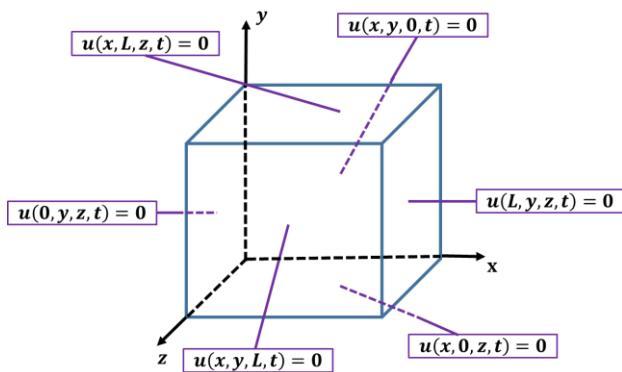


Figura 2: Un sólido cúbico ideal donde las 6 caras se mantienen aisladas.

5.1.1 Caso Lineal

Para esclarecer las características del método desarrollado, supondremos primeramente que la distribución inicial se comporta de manera lineal en la dirección x del sólido de la figura 2. La distribución de temperatura es no uniforme pero lineal a lo largo del eje x, con una temperatura mínima de 26°C en el extremo $x = 0$ m y una temperatura máxima de 90°C grados en el extremo $x = 0.1$ m, matemáticamente esto se expresa en la forma

$$u(x, y, z, 0) = a_0 x + a_1 \quad (26)$$

En la ecuación (26), $a_0 = \frac{62^\circ\text{C}}{0.1\text{m}}$ y $a_1 = 28^\circ\text{C}$ de tal manera que los coeficientes A_{lmn} en la ecuación 22 se calculan a partir de la expresión (23).

En la figura 3 se puede apreciar el comportamiento evolutivo de la distribución inicial de temperatura para varios valores posteriores del tiempo. Es importante notar la distribución inicial al tiempo $t = 0$ min ; se ve claramente el comportamiento lineal de la posición x como función de la temperatura, en el extremo $x = 0$ m se tiene una temperatura de $T = 26^\circ\text{C}$ y en el extremo $x = 0.1$ m se tiene el valor $T = 90^\circ\text{C}$ como temperatura máxima, La constante α se ha tomado con un valor de $18 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{min}}$ de acuerdo con [22]. Es importante señalar que la

caída abrupta en las fronteras del cubo se debe al fenómeno de Gibbs típico de las series de Fourier para funciones continuas por partes en el intervalo de interés [23].

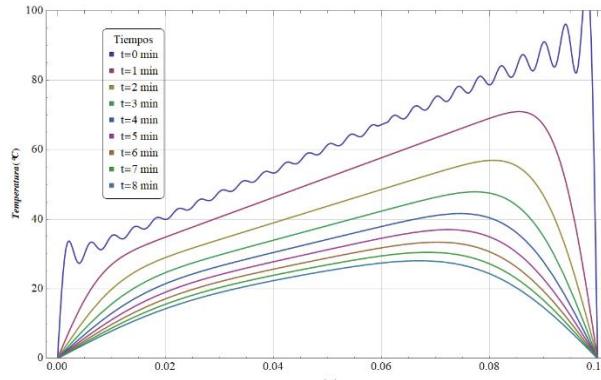


Figura 3: Traza de la función $u(x, 0.9, 0.01, t)$ para un sólido cúbico ideal aislado con $t=0,1,2\dots 8$ minutos.

En la figura 4 se puede apreciar un modelo tridimensional de la distribución de la Temperatura inicial en las coordenadas x y y para $t = 0 \text{ min}$ y $z = 0.01 \text{ m}$

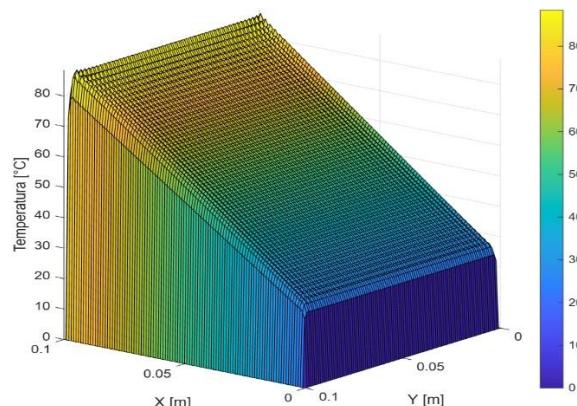


Figura 4: Distribución superficial de la Temperatura para la expresión (25) con $z = 0.01 \text{ m}$ para un sólido cúbico ideal donde las 6 caras se mantienen aisladas con una distribución de temperatura inicial lineal.

5.1.2 Hueco Térmico

El caso interesante para aplicaciones prácticas es aquél en que tenemos un hueco térmico inicial. Este hueco tiene simetría axial a lo largo del eje z y en el punto central del sólido cúbico la temperatura tiene un mínimo $T = 0^\circ\text{C}$ a medida que nos acercamos a las paredes del cubo a lo largo del eje x y el eje y la temperatura aumenta exponencialmente hasta un valor máximo de 90°C justo en las caras del cubo. El modelo correspondiente es

$$u(x, y, z, 0) = 90 \left(1 - e^{-\frac{1}{0.0005}((x-0.05)^2 + (y-0.05)^2)} \right) \quad (27)$$

los coeficientes A_{lmn} en la ecuación (24) se calculan a partir de la expresión (25)

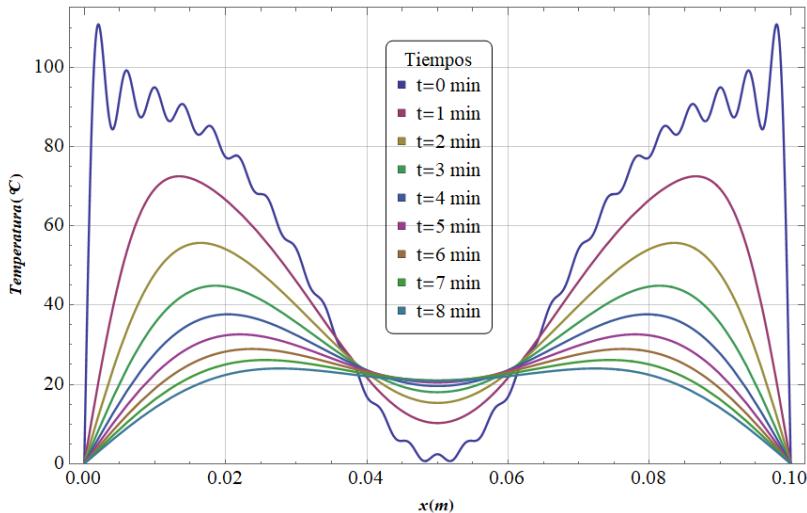


Figura 5: Un sólido cúbico ideal donde las 6 caras se mantienen aisladas y la distribución de temperatura inicial tiene un hueco térmico en el punto central del cubo en ($x = 0.05m, y = 0.05m, z = 0.05m$).

6. Conclusiones

En el presente trabajo se desarrolla, de manera clara y rigurosa, el modelo analítico de la distribución del calor en un sólido prismático. Se hace énfasis en los principios fundamentales de la física para la deducción de la ecuación del calor, empleada como marco general para modelar la distribución térmica en objetos tridimensionales, en particular en el caso de un cubo. Se obtiene la solución general para un sólido cúbico y se analizan dos casos de interés.

En primer lugar, se considera una distribución inicial lineal en una dirección preferencial, correspondiente a un cubo de material expuesto en una de sus caras a una fuente de calor. En segundo lugar se estudia el caso de un hueco térmico degradado, que puede asimilarse analíticamente al de un hueco cilíndrico en el interior de una geometría cúbica. Este último modelo analítico puede ser de interés para el análisis de la distribución del calor para materiales que presentan perforaciones o huecos interiores en su caracterización.

En los dos casos, al analizar la evolución temporal, se observan comportamientos coherentes con las predicciones del modelo de la ecuación del calor y en concordancia con las leyes vigentes de la termodinámica. En particular, para el caso del hueco térmico, se registra un incremento inicial de temperatura durante los primeros seis minutos de evolución, como se muestra en la figura 6, un resultado relevante ya que, en general, se esperaría que la temperatura dentro del sólido disminuyera con el tiempo. No obstante, posteriormente se aprecia una reducción uniforme de la temperatura en todo el cuerpo, véase la figura 5.

Los casos analizados se estudiaron bajo condiciones de frontera homogéneas, donde el objeto se mantiene aislado y libre de interacción con el entorno. El estudio de configuraciones con fronteras a temperatura fija, que también se aborda en el presente artículo, se reserva para una futura ampliación de este trabajo.

Agradecimientos

Los autores agradecen al estudiante de Ingeniería en Mecatrónica, Leonardo Fabricio Rayas Galindo, por su valioso apoyo en la edición y revisión de algunas secciones de este artículo.

Referencias

1. Acevedo-Díaz, J. A., García-Carmona, A., Aragón-Méndez, M. del M., & Oliva-Martínez, J. M., (2017). Modelos científicos: significado y papel en la práctica científica. *Rev. Cient.*, 30(3), 155–166. doi: 10.14483/23448350.12288.
2. Bizzio, M. de los A., Guirado, A. M., & Maturano Arrabal, C. I., (2024). Uso de simulaciones científicas interactivas para fortalecer la formación inicial de docentes de Química. *Revista Educación*, 48(1), 522–542. doi: 10.15517/revedu.v48i1.56052.
3. Ruiz-Martín, C., (2023). Theory and foundations of modeling and simulation. *The Journal of the Institution of Engineers (India): Series B*. doi: 10.1177/00375497231171140.
4. Tamayo-Roca, C., Roca-Revilla, M., & Nápoles-Quiñones, G., (2017). La modelación científica: algunas consideraciones teórico-metodológicas. *Revista Santiago*, (42), 79–90. doi: 10.15517/revedu.v48i1.56052.
5. Berges Díaz, M., (2009). La modelación como método teórico de la investigación educativa. *Revista Varela*, 9(24), 62–74.
6. Ting, T., Wang, X., Chen, W., & Wang, C., (2023). Model calibration and validation from a statistical inference perspective. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 410, 115771. doi: 10.1016/j.cma.2023.115771.
7. Paquette-Rufiange, J., Lemaire, P., & Gogu, C., (2023). Optimal design of validation experiments for the prediction of quantities of interest. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 412, 115889. doi: 10.1016/j.cma.2023.115889.
8. Caro, J. M., Kolominsky-Rabas, J. M., & Ting, E. S. P., (2023). A review of validation and calibration methods for health care modeling and simulation. *Appl. Health Econ. Health Policy*, 23(2), 135–148. doi: 10.1007/s40258-023-00776-3.
9. Sornette, D., Woodard, R., Zhou, W.-X., & Pisarenko, S. N., (2008). General strategy for physics-based model validation. *Computational Mechanics*, 41(5), 741–752. <https://doi.org/10.1007/s00466-007-0160-5>.
10. Anderson, C. D., (1933). The positive electron. *Physical Review*, 43(6), 491–494. doi: 10.1103/PhysRev.43.491.
11. Abbott, B. P., et al., (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6), 061102. doi: 10.1103/PhysRevLett.116.061102.
12. Aad, G., et al. (ATLAS Collaboration), (2012). Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett. B*, 716(1), 1–29. doi: 10.1016/j.physletb.2012.08.020.

Revista Ciencia Aplicada

Conocimiento Multidisciplinario

ISSN: 3122-3664

13. Marvila, M. T., Azevedo, A. R. G., & Monteiro, S. N., (2020). Verification of the application potential of the mathematical models of Lyse, Abrams and Molinari in mortars based on cement and lime. *Journal of Materials Research and Technology*, 9(4), 7327-7334. doi: 10.1016/j.jmrt.2020.04.077.
14. Yue, W., & Wang, B., (2024). Ceramic-added lime and cement mortars: A review of applications in building products. *Sci. Prog.*, 107(3), 0368504241266559. doi: 10.1177/00368504241266559.
15. Haberman, R., (1987). Elementary applied partial differential equations: With Fourier series and boundary value problems. 2nd ed., Prentice-Hall.
16. Arfken, G. B., & Weber, H. J., (1995). Mathematical methods for physicists. 4th ed., Academic Press.
17. Fourier, J., (1878). Analytical theory of heat. Cambridge University Press.
18. Guenther, R. B., & Lee, J. W., (1996). Partial differential equations of mathematical physics and integral equations. Dover Publications.
19. Churchill, R. V., (1941). Fourier and boundary value problems. McGraw Hill.
20. Mint-U, T., & Debnath, L., (2007). Linear partial differential equations for scientists and engineers. 4th ed., Birkhauser Boston.
21. Avila-Navarrete, J. J., & Muñoz-Gómez, J. A. . (2025). Pasta cerámica de bajo costo para impresión 3D. *Revista Ciencia Aplicada*, 1(1), 10-22. <https://www.cienciaplicada.mx/index.php/ciap/article/view/18>
22. Aguilar-Loreto, O., Avila-Navarrete, J. J., & Jiménez-Pérez, A. (2025). Análisis y Modelado de la Distribución Térmica en Morteros. *Revista Ciencia Aplicada*, 1(1), 70-84. [\[Link\]](#)
23. Thompson, W. J. (1992). *Fourier series and the Gibbs phenomenon*. *American Journal of Physics*, 60(5), 425-429. <https://doi.org/10.1119/1.16895>.